ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Marek BALCER
Andrzej MIKA
Tomasz PIZOŃ

QUASIGRUPOID

Streszczenie. Autorzy podają definicje i podstawowe własności struktury nazwanej quasigrupoidem. Następnie szczegółowo omawiają przykład quasigrupoidu $(\Gamma^2, \circ)$, bedając m.in. własności automorfizmów quasigrupoidu $(\Gamma^2, \circ)$.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy przedstawiona jest definicja i podstawowe własności struktury algebraicznej, zwanej dalej quasigrupoidem ze względu na podobieństwo jej aksjomatów do aksjomatów grupoidu. Następnie podajemy przykład quasigrupoidu i badamy własności w tym przypadku. Przykład ten można uważać za uogólnienie grupoidu podstawowego w sensie Brandta, którego konstrukcja podana jest w [1].

Geneza działania opisanego w tym przykładzie sięga działania w strukturze algebraicznej charakteryzującej uogólnioną notację beznawiasową w w sensie Łukasiewicza, (praca na ten temat jest w przygotowaniu do druku).

2. DEFINICJA QUASIGRUPOIDU

Definicja 1. Quasigrupoidem nazywamy parę $(A, \circ)$, gdzie A jest niepustym zbiorem, a działanie "o" spełnia następujące warunki:

1) $\forall a,b,c \in A \quad : \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

2) $\forall a \in A \quad \exists e_p^a \in A : \quad a \circ e_p^a = a$

Element e_p^a nazywamy prawostronnym elementem neutralnym dla a. Zbiór elementów e_p^a oznaczymy przez E_p^a.

3) $\forall a \in A \quad \exists e_l^a \in A : \quad e_l^a \circ a = a$

Element e_l^a nazywamy lewostronnym elementem neutralnym dla a. Zbiór elementów e_l^a oznaczymy przez E_l^a.

4) $\forall a \in A \ \exists e_p^a \in E_p^a \ \ \exists a_p^p \in A \ : \ a \circ a_p^p = e_p^a$

Element a_p^p nazywamy prawostronnym elementem odwrotnym do a względem prawostronnego elementu neutralnego e_p^a.

5) $\forall a \in A \ \ \exists e_p^a \in E_p^a \ \ \exists a_p^l \in A \ : \ a_p^l \circ a = e_p^a$

Element a_p^l nazywamy lewostronnym elementem odwrotnym do a względem prawostronnego elementu neutralnego e_p^a.

6) $\forall a \in A \ \ \exists e_l^a \in E_l^a \ \ \exists a_l^l \in A \ : \ a_l^l \circ a = e_l^a$

Element a_l^l nazywamy lewostronnym elementem odwrotnym do a względem lewostronnego elementu neutralnego e_l^a.

7) $\forall a \in A \ \ \exists e_l^a \in E_l^a \ \ \exists a_l^p \in A \ : \ a \circ a_l^p = e_l^a$

Element a_l^p nazywamy prawostronnym elementem odwrotnym do a względem lewostronnego elementu neutralnego e_l^a.

Jeśli działanie spełnia ponadto warunek:

8) $\forall a,b \in A \ \ \ a \circ b = b \circ a$

to quasigrupoid nazywamy przemiennym.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1

Quasigrupoid jest półgrupą □

Wniosek 2

Jeśli quasigrupoid jest przemienny, to $\forall a \in A \ E_p^a = E_l^a$ i każdy element odwrotny do a jest jednocześnie elementem odwrotnym wszystkich czterech typów □ .

Np. każda grupa abelowa jest quasigrupoidem przemiennym.

3. PRZYKŁAD QUASIGRUPOIDU

Niech dany będzie zbiór $\Gamma \neq \phi$. Elementy tego zbioru będziemy oznaczać małymi literami alfabetu greckiego: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Para $(\Gamma^2, \circ)$, gdzie działanie "o" dane jest wzorem

$$\forall (\alpha,\beta), \ (\gamma,\delta) \in \Gamma^2 \quad (\alpha,\beta) \circ (\gamma,\delta) = (\alpha,\delta) \tag{1}$$

jest quasigrupoidem. Łatwo można sprawdzić następujące własności:

1) Działanie "o" jest łączne.

2) $\forall(\alpha,\beta)\in\Gamma^2$ istnieją niepuste: zbiór elementów neutralnych lewostronnych oznaczamy przez $E_l^{(\alpha,\beta)}$, oraz zbiór elementów neutralnych prawostronnych oznaczamy przez $E_p^{(\alpha,\beta)}$.

Łatwo sprawdzić, że

$$E_l^{(\alpha,\beta)} = \left\{(\alpha,x) : x\in\Gamma\right\} = \left\{\alpha\right\}\times\Gamma \tag{2}$$

$$E_p^{(\alpha,\beta)} = \left\{(x,\beta) : x\in\Gamma\right\} = \Gamma\times\left\{\beta\right\} \tag{3}$$

Z (2) i (3) widać, że

$$\forall(\alpha,\beta)\in\Gamma^2 \quad E_l^{(\alpha,\beta)}\cap E_p^{(\alpha,\beta)} = \left\{(\alpha,\beta)\right\} \tag{4}$$

Zbiory $E_p^{(\alpha,\beta)}$ i $E_l^{(\alpha,\beta)}$ z jednej strony generują cały zbiór Γ^2:

$$\forall(x,y)\in\Gamma^2 \quad \exists(x,\beta)\in E_p^{(\alpha,\beta)} \quad \exists(\alpha,y)\in E_l^{(\alpha,\beta)}$$

$$(x,\beta)\circ(\alpha,y) = (x,y) \tag{5}$$

oraz wyznaczają jednoznacznie element, dla którego są zbiorami elementów neutralnych, co wynika z (4) lub z poniższej równości:

$$\forall(\alpha,x)\in E_l^{(\alpha,\beta)} \quad \forall(y,\beta)\in E_p^{(\alpha,\beta)} \quad (\alpha,x)\circ(y,\beta) = (\alpha,\beta) \tag{6}$$

Łatwo widać, że

$$E_l^{(\alpha,\beta)} = E_l^{(\alpha,\gamma)} = E_l^{(\alpha,\cdot)} \overset{\text{ozn}}{=} E_l^{\alpha} \tag{7}$$

oraz analogicznie

$$E_p^{(\cdot,\alpha)} = E_p^{\alpha}. \tag{8}$$

3) Dla każdego $(\alpha,\beta)\in\Gamma^2$ istnieją 4 typy elementów odwrotnych:

a) lewostronne względem lewostronnych elementów neutralnych. Zbiór tych elementów odwrotnych oznaczymy przez $L_{l(\cdot,\cdot)}^{(\alpha,\beta)}$.

Zbiór $L_{l(\cdot,\cdot)}^{(\alpha,\beta)}$ jest niepusty tylko dla elementu neutralnego (α,β) i

$$L_{l(\alpha,\beta)}^{(\alpha,\beta)} = E_l^{\alpha} \tag{9}$$

b) prawostronne względem lewostronnych elementów neutralnych.

Zbiór tych elementów odwrotnych oznaczymy przez $P_{l(\cdot,\cdot)}^{(\alpha,\beta)}$. Dla dowolnego lewostronnego elementu neutralnego (α,x) istnieje niepusty zbiór $P_{l(\alpha,x)}^{(\alpha,\beta)}$

i
$$P^{(\alpha,\beta)}_{l(\alpha,x)} = E^{x}_{p}. \tag{10}$$

c) prawostronne względem prawostronnych elementów neutralnych. Zbiór tych elementów odwrotnych oznaczymy przez $P^{(\alpha,\beta)}_{p(\cdot,\cdot)}$. Zbiór $P^{(\alpha,\beta)}_{p(\cdot,\cdot)}$ jest niepusty tylko dla elementu neutralnego (α,β) i

$$P^{(\alpha,\beta)}_{p(\alpha,\beta)} = E^{\beta}_{p}. \tag{11}$$

d) lewostronne względem prawostronnych elementów neutralnych. Zbiór tych elementów odwrotnych oznaczymy przez $L^{(\alpha,\beta)}_{p(\cdot,\cdot)}$. Dla dowolnego prawostronnego elementu neutralnego (x,β) istnieje niepusty zbiór $L^{(\alpha,\beta)}_{p(x,\beta)}$
i

$$L^{(\alpha,\beta)}_{p(x,\beta)} = E^{x}_{l} \tag{12}$$

4) Działanie nie jest przemienne, można jednak wprowadzić przemienność typu inwersyjnego w poniższy sposób:

Definicja 2

Inwersją w zbiorze Γ^2 nazywamy bijekcję

$$i : \Gamma^2 \longrightarrow \Gamma^2$$

daną wzorem

$$\forall(\alpha,\beta) \in \Gamma^2 \quad i(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha) \tag{13}$$

Rozpatrzmy teraz inwersję w zbiorze Γ^2 oznaczaną przez I.

$$I : \Gamma^2 \times \Gamma^2 \longrightarrow \Gamma^2 \times \Gamma^2$$

daną wzorem:

$$\forall((\alpha,\beta),\ (\gamma,\delta)) \in \Gamma^2 \times \Gamma^2 \quad I((\alpha,\beta),\ (\gamma,\delta)) = ((\gamma,\delta),\ (\alpha,\beta)) \tag{14}$$

Łatwo widać, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^2\times\Gamma^2 \arrow[rr, "I"] \arrow[d, "i\times i"'] & & \Gamma^2\times\Gamma^2 \arrow[dd, "o"] \\
\Gamma^2\times\Gamma^2 \arrow[d, "o"'] & & \\
\Gamma^2 \arrow[rr, "i"] & & \Gamma^2
\end{tikzcd} \tag{15}$$

$$I\left[(\alpha,\beta)\circ(\gamma,\delta)\right] = (\gamma,\delta)\circ(\alpha,\beta) = (\gamma,\beta) = i(\beta,\gamma) =$$
$$= i\left[(\beta,\alpha)\circ(\delta,\gamma)\right] = i\left[(i(\alpha,\beta))\circ(i(\gamma,\delta))\right]$$

Tę własność działania "o" nazywamy przemiennością typu inwersyjnego.

4. HOMOMORFIZMY QUASIGRUPOIDU

Definicja 3

Homomorfizmem quasigrupoidu w quasigrupoid, $(A,\circ)$ w $(B,*)$ nazywamy funkcję $f : A \to B$ taką, że $f(a\circ b) = f(a)*f(b)$. Mamy następujące

Twierdzenie 1

Jeśli f jest homomorfizmem quasigrupoidu $(A,\circ)$ w quasigrupoid $(B,*)$ to $f(e_p^a) \in E_p^{f(a)}$ i $f(e_l^a) \in E_l^{f(a)}$, oraz $f(a_p^p)$, $f(a_l^p)$, $f(a_p^l)$, $f(a_l^l)$ są elementami odwrotnymi do $f(a)$ odpowiednich typów.

Dowód

Mamy $f(a) = f(a\circ e_p^a) = f(a) * f(e_p^a) \Rightarrow f(e_p^a) \in E_p^{f(a)}$

Dla e_l^a analogicznie.

Rozpatrzmy teraz jeden z typów elementów odwrotnych (dla pozostałych dowód analogiczny).

Mamy

$$e_p^{f(a)} = f(e_p^a) = f(a\circ a_p^p) = f(a) * f(a_p^p),$$

czyli $f(a) * f(a_p^p) = e_p^{f(a)}$. □

5. AUTOMORFIZMY QUASIGRUPOIDU $(\Gamma^2,\circ)$

Rozpatrzmy bijekcję zbioru Γ, $g : \Gamma \to \Gamma$ oraz skonstruowaną przy jej pomocy bijekcję $G : \Gamma^2 \to \Gamma^2$

$$\forall(\alpha,\beta)\in\Gamma^2 \quad G(\alpha,\beta) = (g(\alpha),\, g(\beta)), \quad \text{tj. } G = g\times g. \tag{16}$$

Twierdzenie 2

G jest automorfizmem $(\Gamma^2,\circ)$. □

Rozpatrzymy teraz dowolną bijekcję $J : \Gamma^2 \to \Gamma^2$. Mamy następujące:

Twierdzenie 3

Aby bijekcja $J : \Gamma^2 \to \Gamma^2$ była automorfizmem quasigrupoidu $(\Gamma^2,\circ)$ potrzeba, by była określona przez dwie bijekcje $j_1, j_2 : \Gamma \to \Gamma$ następująco

$$\forall(\alpha,\beta)\in\Gamma^2 \quad J(\alpha,\beta) = (j_1(\alpha),\, j_2(\beta)). \tag{17}$$

Dowód

Niech $J : \Gamma^2 \to \Gamma^2$ będzie bijekcją, $\forall(\alpha,\beta)\in\Gamma^2$ będziemy oznaczać

$$J(\alpha,\beta) = (j_{(\alpha,\beta)}(\alpha),\ j_{(\alpha,\beta)}(\beta)).$$

$\forall(\alpha,\beta),\ (\gamma,\delta)\in\Gamma^2$ żądamy równości

$$J((\alpha,\beta)\circ(\gamma,\delta)) = J(\alpha,\beta)\circ J(\gamma,\delta),$$

czyli

$$(j_{(\alpha,\delta)}(\alpha),\ j_{(\alpha,\delta)}(\delta)) = (j_{(\alpha,\beta)}(\alpha),\ j_{(\gamma,\delta)}(\delta)).$$

A zatem

$$j_{(\alpha,\delta)}(\alpha) = j_{(\alpha,\beta)}(\alpha) \quad \text{i} \quad j_{(\alpha,\delta)}(\delta) = j_{(\gamma,\delta)}(\delta).$$

Uwaga

W przypadku $j_{(\alpha,\alpha)}(\alpha)$ musimy wyróżnić jeden element indeksu, w zależności od tego czy argument α jest pierwszym, czy drugim elementem pary (α,α).

Ponieważ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ są dowolne, to

$$j_{(\alpha,\cdot)}(\alpha) = j_1(\alpha) \quad \text{i} \quad j_{(\cdot;\alpha)}(\alpha) = j_2(\alpha).$$

Ponieważ J jest bijekcją, to j_1 i j_2 są bijekcjami □

6. PODQUASIGRUPOIDY

Definicja 4

Podquasigrupoidem quasigrupoidu $(A,\circ)$ nazywamy parę $(B,\circ)$, gdzie $B\subset A$ i działanie "o" zawężone do zbioru B spełnia aksjomaty quasigrupoidu.

Podquasigrupoidami quasigrupoidu $(\Gamma^2,\circ)$ są następujące podzbiory Γ^2:

a) $\forall \alpha\beta\in\Gamma$ zbiór $\{(\alpha,\beta)\}$ – jest to grupa w zwykłym sensie (grupa trywialna).

b) $\forall\alpha\in\Gamma$ zbiory E_p^α i E_l^α, przy czym inwersja i jest izomorfizmem tych obu quasigrupoidów.

c) $\forall\ \Gamma_0\subset\Gamma$ zbiór Γ_0^2.

d) $\forall\ \Gamma_0\subset\Gamma$ zbiory $\Gamma_1 = \bigcup_{\alpha\in\Gamma_0} E_l^\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Gamma_0} \{\alpha\}\times\Gamma$

oraz $\Gamma_2 = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_0} E_p^{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_0} \Gamma \times \{\alpha\}$

przy czym inwersja i jest izomorfizmem między Γ_1 i Γ_2.

LITERATURA

[1] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Skrypt Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1969, str. 41-43.

[2] Malcev A.I.: Algebraiczeskije systemy, Moskwa 1970.

[3] Boruvka O.: Groupoids and groups, VEB, Berlin 1974.

[4] Biełousov W.D.: Algebraiczeskije seti i kwazigrupy, Moskwa 1972.

КВАЗИГРУППОИД

Р е з ю м е

В рабо́те вводится определениие и рассматриваются основные свойства некоторой алгебраической структуры, названной авторами "квазигруппоидом". Затем, даётся пример квазигруппоида $(\Gamma^2, \circ)$ и проделывается детальный анализ свойств для данного случая.

QUASIGRUPOID

R e s u m e

Les auteurs presentent la définition et les propriétes fondamental de la structure algébraique qui s'appelle quasigrupoid. Ensuita ils considérent précisement l'exemple du quasigrupoid $(\Gamma^2, \circ)$, on ètudie entre autres les propriétes d'automorphismes du quasigrupoid $(\Gamma^2, \circ)$.