ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Krzysztof HERMAN

# OGÓLNA POSTAĆ WOLNYCH GENERATORÓW JĄDER PEWNYCH OPERACJI WERBALNYCH

Streszczenie. Praca niniejsza poświęcona jest wyznaczeniu ogólnej postaci generatorów jąder operacji werbalnych typu iloczynu nilpotentnego i polinilpotentnego grup wolnych.

W poniższych rozważaniach zastosujemy wyniki prac M.A. Warda [4], [5], [6] do wyznaczenia jąder iloczynów nilpotentnych i polinilpotentnych typu $K_d$. Odnośnie definicji i twierdzeń odsyła się czytelnika do prac [1], [3], [4], [5], [6] lub do nie publikowanej pracy magisterskiej autora.

**Definicja 1**

Niech $\{G_i\}_{i\in M}$ będzie rodziną grup, X - grupą absolutnie wolną przeliczalnej rangi, a V dowolnym podzbiorem X. Przez V(F) oznaczam podgrupę werbalną grupy F generowaną przez zbiór V (por. [1], [3]).

Niech $F = \prod^{*}_{i\in M} G_i$. V - iloczynem werbalnym grup $G_i$ nazywam grupę

$$H = \prod^{*}_{i\in M} G_i = {}^{F}\!/_{V(F)\cap C},$$

gdzie C jest podgrupą kartezjańską, tj. jądrem odwzorowania kanonicznego iloczynu wolnego grup $G_i$ w ich iloczyn prosty. $V(F)\cap C$ nazywam jądrem V-operacji.

Przykładami mogą być operacje nilpotentne i polinilpotentne typu $K_d$.

Niech $X = \prod^{*}_{\alpha\in M} X_\alpha$,

gdzie $X_\alpha$ jest absolutnie wolną grupą o generatorach $\{x_{\alpha i}\}_{i\in N}$. Zakładam, że zbiory M i N są co najwyżej przeliczalne.

Dalej podaję konstrukcję jądra operacji nilpotentnych i polinilpotentnych dla czynników będących grupami wolnymi.

Ustalam $d>1$, gdyż konstrukcja przebiegać będzie analogicznie zarówno w przypadku jąder operacji nilpotentnych (przypadek $d=1$) jak i operacji polinilpotentnych typu $K_d$. Dla ustalenia uwagi przyjmuję, że dany jest opis wolny $\varphi$ (por. [5]) grupy $X$, w którym rolę wolnych generatorów $X$ gra zbiór $\{x_{\alpha i}\}$.

Niech $J_d$ będzie, podobnie jak w pracy [2], zbiorem inwertatorów bazowych d - wagi 1. Zgodnie z głównym wynikiem prac [4] i [5] $\varphi(I_d) = J_d$ jest zbiorem wolnych generatorów $P_{K_d}(X)$. (W przypadku d=1 - zbiorem generatorów $k_1$ - wyrazu dolnego szeregu centralnego).

**Twierdzenie 1**

Elementy $\overline{J}_d$, będące w $X$ komutatorami w symbolach $x_{\alpha i}$ są albo elementami z $X_\alpha$ albo elementami podgrupy kartezjańskiej $C$.

**Dowód**

Z definicji inwertatora bazowego [4] wynika, że elementy $J_d$ są utworzone z generatorów $x_{\alpha i}$ za pomocą komutowania i odwrotności. Jeżeli wszystkie komponenty komutatora noszą ten sam indeks $\alpha$ to teza jest oczywista, gdyż jest on elementem $X_\alpha$. Należy więc wykazać, że jeżeli komponenty komutatora $j_o$ leżą w różnych czynnikach wolnych $X_\alpha$ to $j_o \in C$.

Rozważam iloczyn prosty $\overline{X} = \prod^*_{\alpha \in M} X_\alpha$ i zbiór odwzorowań $\varphi_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \overline{X}$ będących zanurzeniami $X_\alpha$ w $X$.

Z własności iloczynów prostych (por. [5] rozdz. 1.8) odwzorowania $\varphi_\alpha$ sklejają się w odwzorowanie $\varphi^* : X \longrightarrow \overline{X}$ o tej własności, że obcięcie $\varphi^*_{X_\alpha}$ jest identyczne z $\varphi_\alpha$. Dokonując rozszerzenia $\varphi_\alpha$ na $X$ w ten sposób, że

$$\varphi_{\alpha_1}(X_{\alpha_2}) = 1 \quad \text{przy} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

stwierdzamy, że jądro $\varphi^*$ jest częścią wspólną jąder $\varphi_\alpha$ traktowanych jako odwzorowania $X$ w $\overline{X}$. Z drugiej strony $\varphi^*$ jest kanonicznym odwzorowaniem $X$ w $\overline{X}$, więc jego jądrem jest $C$ ([5], rozdz. 1.8).

Wystarczy więc pokazać, że rozważany komutator $j_o$ przechodzi w 1 przy wszystkich $\varphi_\alpha$. Z założenia o $j_o$ wynika, że zawiera on komponenty z co najmniej 2 różnych czynników wolnych $X_{\alpha_1}$ i $X_{\alpha_2}$. Stąd wnioskujemy, że przy każdym $\varphi_\alpha$ przynajmniej jedna komponenta $j_o$ przechodzi w 1. Prosta indukcja pokazuje, że zamiana na 1 choćby jednej komponenty komutatora powoduje, że komutator staje się równy 1, co kończy dowód.

Opierając się na powyższym twierdzeniu można wprowadzić oznaczenia na podzbiory $\overline{J}_d$. Przez $\overline{J(\alpha)}$ oznaczam zbiór $\{j_1(\alpha), j_2(\alpha) \ldots\}$ generatorów $P_{K_\alpha}(X)$ zawartych w $X_\alpha$ zaś $\overline{J(0)} = \{j_1, j_2 \ldots\}$ oznacza zbiór generatorów neutralnych $P_{K_\alpha}(X)$, tzn. leżących w $C$. (Wykorzystując terminologię O.N. Gołowina należałoby powiedzieć całkowicie neutralnych). Ponadto dla dowolnej rodziny podgrup $\{G_i\}_{i \in I}$, jeżeli zbiór indeksów $I$ jest uporządkowany oznaczam przez

$$\prod_{i \in I} G_i$$

zbiór tych elementów g, które można zapisać w postaci:

$$g = g_{i_1}\, g_{i_2} \cdots g_{i_n} \quad \text{i} \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_n.$$

Stosując teraz twierdzenie 3.4 z pracy [2] dla iloczynów wolnych dostaję równość

$$P_{K_d}(X) = \prod_{\alpha \in M} P_{K_d}(X_\alpha)(P_{K_d}(X) \cap C) \tag{1}$$

Równość (1) i twierdzenie 1 stanowią podstawę konstrukcji wolnych generatorów jąder iloczynów nilpotentnych i polinilpotentnych w przypadku grup wolnych.

Z równości 1 wynika, że $\prod_{\alpha \in M} P_{K_d}(X_\alpha)$ tworzy zbiór reprezentantów schreierowskich $P_{K_d}(X)$ względem podgrupy $P_{K_d}(X) \cap C$, por. 1.

Reprezentanty oznaczam

$$S = c_{\alpha_1} \cdot c_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot c_{\alpha_n} \qquad c_{\alpha_q} \in P_{K_d}(X_{\alpha_q})$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$$

Aby móc stosować metodę Schreiera trzeba jeszcze wyznaczyć funkcję selekcjonującą.

Przyjmujemy więc:

$$\overline{c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \cdots c_{\alpha_n} j_k} = c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \cdots c_{\alpha_n} \quad \text{dla} \quad j_k \in C$$

$$\overline{c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \cdots c_{\alpha_n} j_k(\alpha)} = c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \cdots c_{\alpha_l}\, j_k(\alpha)\, c_{\alpha_{l+1}} \cdots c_{\alpha_n}$$

$$\text{dla} \quad j_k(\alpha) \in P_{K_d}(X_\alpha) \ \text{i} \ 0 < \alpha_l \leqslant \alpha < \alpha_{l+1}$$

Rozpatruję teraz wyrażenia postaci

$$S\, j_k(\alpha)\, \left(\overline{S\, j_k(\alpha)}\right)^{-1}$$

tworzące schreierowski układ generatorów, por. [1].

W przypadku $j_k$ neutralnych otrzymujemy pierwszy typ wolnych generatorów postaci

$$S\, j_k^{\varepsilon}\, S^{-1},$$

gdzie $S$ jest reprezentantem, $\varepsilon = \pm 1$.

Dla nieneutralnych generatorów $j_k^{\varepsilon}(\alpha)$ dostaję wyrażenie postaci

$$c_{\alpha_1}\ldots c_{\alpha_2} c_{2+1}\ldots c_{\alpha_n} j_k^{\varepsilon}(\alpha)(c_{\alpha_1}\ldots c_{\alpha_l} j_k^{\varepsilon}(\alpha)\, c_{\alpha_{2+1}}\ldots c_{\alpha_n})^{-1} =$$

$$= \left[(c_{\alpha_{2+1}}\ldots c_{\alpha_n},\ j_k^{\varepsilon}(\alpha)\right]^{(c_{\alpha_1}\ldots c_{\alpha_l})},$$

gdzie

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} \quad \text{i} \quad a^b = bab^{-1}$$

Z uwagi na fakt, że $c_{\alpha_q}$ są dowolnymi elementami z $P_{K\alpha}(X_{\alpha_q})$ mogą dla dowolnego reprezentanta

$$S = c_{\alpha_1}\ldots c_{\alpha_l}\, c_{\alpha_{2+1}}\ldots c_{\alpha_r}$$

wprowadzić oznaczenia

$$A_{\alpha_l} = c_{\alpha_{l+1}}\ldots c_{\alpha_n} \quad \text{i} \quad B_{\alpha_l} = c_{\alpha_1}\ldots c_{\alpha_l}$$

wtedy drugi typ wolnych generatorów $P_{K\alpha}(X) \cap C$ będą postaci ogólnej

$$[A_{\alpha_l},\ j_k^{\varepsilon}(\alpha)]^{B_{\alpha_l}} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Oczywiście jeżeli $\alpha > \alpha_n$ to $S\, j_k(\alpha) = \overline{S\, j_k(\alpha)}$ i wtedy generator nie powstaje, zaś gdy $\alpha < \alpha_1$ to w drodze umowy przyjmuję $B_{\alpha_2} = 1$ i generator jest postaci $[S,\ j_k^{\varepsilon}(\alpha)]$.

## LITERATURA


[1] Karras A., Magnus W., Solitar D.: Combinatorial Group Theory. Toronto 1966.

[2] Moran S.: Associative operations on groups I. Proc. London Math.Soc. 6 N° 24 (1956).

[3] Neumann H.: Varieties of Groups, Springer Vrl. 1969.

[4] Ward M.A.: Basis for polynilpotent groups. Proc. London Math.Soc. (3) 24 (1972) 409-431.

[5] Ward M.A.: Basis commutators. Philos.Trans Royal Society Ser. A 264 (1969) 343-412.

[6] Ward M.A.: The third term of the lower central series of a free group as a subgroup of the second. The Book dedicated to the memory of Hanna Neumann. Toronto 1976.

СВОБОДНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ В ЯДРАХ ВЕРБАЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ И ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНЫХ ПРОИЗ ВЕДЕНИЙ

Р е з ю м е

В статье даётся конструкция свободных образующих в ядрах вербальных нильпотентных и полинильпотентных произведений свободных сомножителей.

Конструкция использует теорию коммутаторов Уорда.

FREE GENERATORS OF KERNELS OF VERBAL NILPOTENT AND POLYNILPOTENT PRODUCTS

S u m m a r y

In this paper we give the construction of free generators of kornels of verbal nipotent and polynilpotent product for free factors. The construction is based on Ward's theory of basic commutators.