ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Bolesław P. WANTUŁA

UWAGA O NIESKOŃCZONYCH PODGRAFACH PEŁNYCH

Streszczenie. W pracy wykazane zostało następujące twierdzenie: nieskończony graf G zawiera nieskończony podgraf pełny G', wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera nieskończony podgraf G", którego wszystkie jądra są skończone. Z twierdzenia tego z łatwością wynika znane twierdzenie Ramsey'a: Każdy nieskończony dwubarwny graf pełny zawiera nieskończony podgraf pełny jednobarwny.

Niech $G = (X, V)$ będzie grafem nieskończonym zwykłym. Przez $G_1 = (X_1, V_1)$ oznaczamy dowolny jego podgraf. Każdy zbiór niezależny (stabilny wewnętrznie) podgrafu G_1 jest zbiorem niezależnym grafu G. Korzystając z oczywistej własności, że każdy zbiór niezależny można rozszerzyć do jądra otrzymujemy:

Lemat

Jeżeli graf nieskończony G ma wszystkie jądra skończone, to każdy jego podgraf G_1 ma wszystkie jądra skończone.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Graf nieskończony G zawiera nieskończony podgraf pełny G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera nieskończony podgraf G_2, którego wszystkie jądra są skończone.

Dowód

Jeżeli graf G zawiera nieskończony podgraf pełny G_1, to podgraf ten jest szukanym podgrafem nieskończonym o jądrach skończonych - wszystkie jego jądra są jednoelementowe. Niech teraz graf $G = (X, V)$ zawiera podgraf $G_1 = (X_1, V_1)$ nieskończony o jądrach skończonych. Podgraf nieskończony pełny $G_2 = (X_2, V_2)$ konstruujemy następująco.

Bierzemy dowolne jądro J_1 podgrafu G_1. Ponieważ J_1 jest skończone zaś $X_1 \setminus J_1$ nieskończony, zatem istnieje nieskończony podzbiór W_1, taki że $W_1 \subset X_1 \setminus J_1$ oraz wierzchołek $x_1 \in J_1$ sąsiadujący z każdym wierzchołkiem zbioru W_1. Bierzemy dowolne jądro J_2 podgrafu generowanego przez zbiór wierzchołków W_1. Ponieważ jądro J_2 jest skończone - patrz lemat - zaś zbiór $W_1 \setminus J_2$ nieskończony, zatem istnieje zbiór nieskończony W_2 taki, że $W_2 \subset W_1 \setminus J_2$, oraz wierzchołek $x_2 \in J_2$ sąsiadujący z każdym wierzchołkiem zbioru W_2. Powtarzając tę operację nieskończenie wiele razy uzyska-

my zbiór $X_2 = \{x_1, x_2, ...\}$. Podgraf generowany przez zbiór wierzchołków X_2 jest szukanym podgrafem pełnym nieskończonym.
Z twierdzenia tego, jako łatwy wniosek, otrzymujemy twierdzenie Ramsey'a (1):

Wniosek

Każdy nieskończony graf pełny, którego krawędzie zostały rozbite na dwie klasy, zawiera podgraf nieskończony pełny, którego wszystkie krawędzie należą do jednej klasy.

Dowód

Jeżeli nie istnieje podgraf nieskończony pełny o krawędziach z klasy K_1, to wszystkie jądra grafu częściowego o krawędziach klasy K_2 są skończone - i na podstawie twierdzenia graf ten zawiera podgraf nieskończony pełny (podgraf częściowy o krawędziach klasy K_2 musi być wtedy nieskończony - w przeciwnym razie graf częściowy o krawędziach klasy K1 zawierałby podgraf nieskończony pełny).

LITERATURA

[1] Ramsey F.P.: On a problem of formal logic - Proc. London Math. Soc 30 (1930).

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПОЛНЫХ ПОДГРАФАХ

Р е з ю м е

В работе доказывается следующая теорема: бесконечный граф G содержит бесконечный полный подграф G' тогда и только тогда, когда он содержит бесконечный подграф G'', все ядра которого конечны. Из этой теоремы вытекает известная теорема Рамсея: всякий бесконечный двухцветный полный граф содержит бесконечный одноцветный полный подграф.

ON INFINITE COMPLETE SUBGRAPHS

S u m m a r y

In this paper the following theorem is proved:
Infinite graph G contains infinite complete subgraph G' if and only if G contains infinite subgraph G'' whose every kernel is finite.

This theorem easly implies the well known theorem of Ramsey: Every infinite complete two-coloured graph contains infinite one - coloured complete subgraph.