ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Brunon SZOCIŃSKI

ORIENTACJA GEOMETRII PODWÓJNIE PSEUDOSTOCHASTYCZNEJ

Streszczenie. W pracy tej udowodniono, że n-wymiarowa geometria podwójnie pseudostochastyczna jest n-orientowalna.

1. Na wstępie przytoczymy definicje pewnych pojęć, niezbędnych do dalszych rozważań. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a G dowolną grupą abstrakcyjną. Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie

$$f : X \times G \longrightarrow X \tag{1.1}$$

spełniające następujące warunki

1° $\bigwedge\limits_{x \in X} \bigwedge\limits_{g_1, g_2 \in G} f(f(x,g_1),g_2) = f(x, g_2 \circ g_1)$

2° $\bigwedge\limits_{x \in X} f(x,e) = x,$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy G, zaś $g_2 \circ g_1$ oznacza iloczyn w grupie G. Działanie (1.1) grupy G na zbiorze X nazywa się efektywnym, jeśli spełnia implikację

$$\bigwedge_{x \in X} f(x,g) = x \Longrightarrow g = e.$$

Przy pomocy pojęcia działania efektywnego można określić geometrię Kleina (p. [1], s. 272 oraz [2] s. 388) w sposób następujący.

Definicja 1.1

Każdą trójkę

$$(M,\ G,\ f), \tag{1.2}$$

gdzie M jest dowolnym zbiorem, G dowolną grupą, a f efektywnym działaniem grupy G na zbiorze M, nazywamy geometrią Kleina grupy G.

Niech G_o będzie podgrupą grupy G. Przez f_o oznaczmy odwzorowanie, które jest zacieśnieniem efektywnego działania f grupy G na M do zbioru $M \times G_o$, tzn. $f_o := f\,|_{M \times G_o}$. Łatwo sprawdzić, że f_o jest działaniem efektywnym grupy G_o na M trójka $(M,\ G_o,\ f_o)$ tworzy więc pewną geometrię

$$(M_s, G, f_s) \tag{2.2}$$

gdzie $f_s := f^s|_{M_s \times G}$. Obiekt (2.2) może nie być tranzytywnym.

Przez $\mathfrak{m}_s$ oznaczmy dowolne włókno tranzytywne obiektu (2.2). Ponieważ jest ono podzbiorem niezmienniczym, możemy utworzyć następujący tranzytywny obiekt częściowy

$$(\mathfrak{m}_s, G, F_s) \tag{2.3}$$

gdzie:

$$F_s := f_s|_{\mathfrak{m}_s \times G}.$$

Za pomocą powyższego obiektu określa się s-orientowalność geometrii (1.2).

Definicja 2.3

Geometrię (1.2) nazywamy s-orientowalną, jeżeli istnieje niezmienniczy rozkład obiektu (2.3), który składa się z dwóch niepustych podzbiorów $\mathfrak{m}_s^+$ i $\mathfrak{m}_s^-$. Każdy z tych podzbiorów nazywamy s-orientacją, a geometrię (1.2) z wybraną jedną z tych orientacji nazywamy geometrią s-zorientowaną.

Orientowalność geometrii (1.2) związana jest ściśle z orientowalnością grupy G, określoną następująco:

Definicja 2.4

Grupę G nazywamy orientowalną, jeżeli zawiera podgrupę H o indeksie 2. Wtedy mówimy także, że grupa G jest zorientowaną przez podgrupę H.

W pracy [5] udowodniono, że s-orientowalność geometrii nie zależy od wyboru włókna tranzytywnego $\mathfrak{m}_s$. Wynika to natychmiast z następujących lematów.

Lemat 2.1

Jeżeli geometria (1.2) jest s-orientowalną, to grupa G jest orientowalna.

Lemat 2.2

Jeżeli grupa G jest orientowalna oraz w geometrii (1.2) istnieją repery rzędu s, to każde włókno tranzytywne obiektu (2.2) posiada niezmienniczy rozkład złożony z dwóch niepustych zbiorów rozłącznych, a więc geometria (1.2) jest s-orientowalna.

Następny lemat, udowodniony w pracy [8] s. 324, podaje warunki na orientowalność grupy.

Lemat 2.3

Podgrupa $H \subset G$ orientuje grupę G, wtedy i tylko wtedy, gdy $H \neq G$ oraz $\bigwedge_{a,b \in G-H} a \cdot b \in H$.

3. Jak wiadomo, zbiór wszystkich nieosobliwych macierzy stopnia n o elementach rzeczywistych tworzy z mnożeniem macierzowym grupę $GL(n,R)$, zwaną ogólną grupą liniową. Przez grupę afiniczną $GA(n,R)$ rozumiemy zbiór par (A,a), gdzie $A \in GL(n,R)$, $a \in R^n$ z działaniem "$\circ$" określonym w sposób następujący

$$(B,b) \circ (A,a) = (BA, Ba + b).$$

Przez n-wymiarową geometrię afiniczną (p.[2], s. 390 rozumiemy trójkę

$$(R^n,\ GA(n,R),\ f) \tag{3.1}$$

gdzie działanie f grupy $GA(n,R)$ na R^n jest określone wzorem

$$f(x,g) := Ax + a, \quad g = (A,a) \in GA(n,R), \quad x \in R^n.$$

Dowolnej podgrupie $H(n,R)$ ogólnej grupy liniowej $GL(n, R)$ odpowiada pewna podgrupa

$$GH(n,R) = \left\{ (A,a) : A \in H(n,R),\ a \in R^n \right\}$$

grupy afinicznej $GA(n, R)$. Każdej podgrupie $GH(n, R)$ odpowiada więc podgeometria geometrii afinicznej, określona przez trójkę

$$(R^n,\ GH(n, R),\ f) \tag{3.2}$$

gdzie $f(x, g) = Ax + a$, $g = (A, a) \in GH(n, R)$, $x \in R^n$. Trójkę (3.2) nazywać będziemy n-wymiarową geometrię grupy $GH(n, R)$. Ponieważ geometria ta jest wyznaczona przez grupę $H(n, R)$, dlatego będziemy ją również nazywać geometrią Kleina opartą na tej grupie.

Definicja 3.1

Macierz kwadratową $A = [a_{ik}]$, $a_{ik} \in R$ nazywamy podwójnie pseudostochastyczną lub krótko macierzą dps (p. [7] s. 35 deppelt pseudostochastische Matrix), jeśli

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1, \ i,k=1,2,\dots,n.$$

W pracy [7] udowodniono, że zbiór wszystkich nieosobliwych macierzy dps stopnia n z mnożeniem macierzowym tworzy grupę $DS(n, R)$, zwaną podwójnie pseudostochastyczną (w skrócie grupą dps).

Definicja 3.2

Geometrię Kleina (3.2) opartą na grupie $DS(n, R)$, tzn. trójkę

$$(R^n,\ GDS(n, R),\ f) \tag{3.3}$$

nazywamy n-wymiarową geometrią podwójnie pseudostochastyczną (geometrią dps).

Przy wyznaczaniu s-orientacji geometrii (3.3) skorzystamy z poniższego lematu.

Lemat 3.1

Na to, aby istniała dokładnie jedna macierz $A \in DS(n, R)$, $n \geq 2$, spełniająca układ równań macierzowych

$$Au_i = \bar{u}_i, \quad i=1,2,\ldots,n-1 \tag{3.4}$$

gdzie

$$u_i = \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^n \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_i = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^1 \\ \bar{u}_i^2 \\ \vdots \\ \bar{u}_i^n \end{bmatrix}$$

potrzeba i wystarcza, aby zachodziły związki

$$\sum_{l=1}^{n} u_i^l = \sum_{l=1}^{n} \bar{u}_i^l \quad \text{dla } i=1,2,\ldots,n-1 \tag{3.5}$$

$$\det\left[\mathcal{E}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\right] \neq 0 \tag{3.6}$$

$$\det\left[\mathcal{E}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}\right] \neq 0 \tag{3.7}$$

gdzie $\mathcal{E}$ jest jednokolumnową macierzą, elementami której są same jedynki.

Dowód

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$S_i := \sum_{l=1}^{n} u_i^l, \quad \bar{S}_i := \sum_{l=1}^{n} \bar{u}_i^l, \quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

$$U = \left[\mathcal{E}, u_1, \ldots, u_{n-1}\right], \quad \bar{U} = \left[\mathcal{E}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\right]$$

i zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in DS(n,R)$ zachodzi równość $A\mathcal{E} = \mathcal{E}$. Wobec tego, układ równań (3.4) możemy zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$A \cdot U = \bar{U} \tag{3.8}$$

Załóżmy teraz, że istnieje dokładnie jedna macierz $A = [a_{ij}] \in DS(n,R)$, która spełnia układ równań (3.4). Wówczas

$$\bar{s}_i = \sum_{l=1}^{n} \bar{u}_i^l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} u_i^j = \sum_{j=1}^{n} u_i^j \sum_{l=1}^{n} a_{lj} = \sum_{j=1}^{n} u_i^j = s_i,$$

co dowodzi (3.5). Dla dowodu (3.6) zauważmy przede wszystkim, że dowolną macierz dps $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geqslant 2$ można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} 2-n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} & 1 - \sum_{i=2}^{n} a_{i2} & \dots & 1 - \sum_{i=2}^{n} a_{in} \\ 1 - \sum_{j=2}^{n} a_{2j} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \sum_{j=2}^{n} a_{nj} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Stąd wobec (3.8) otrzymujemy

$$(1 - \sum_{l=2}^{n} a_{il}) u_j^1 + a_{i2} u_j^2 + \dots + a_{in} u_j^n = \bar{u}_j^i \quad \text{dla } i>1, \tag{3.10}$$

czyli

$$a_{i2}(u_j^2 - u_j^1) + a_{i3}(u_j^3 - u_j^1) + \dots + a_{in}(u_j^n - u_j^1) = \bar{u}_j^i - u_j^1 \tag{3.11}$$

dla $i = 2, 3, \dots, n$ oraz $j=1,2,\dots,n-1$. Gdybyśmy chcieli przy danych macierzach U i $\bar{U}$ wyznaczyć elementy macierzy A, istnienie której założyliśmy, można by skorzystać ze związków (3.11). Określają one bowiem $n-1$ układów równań liniowych, z których każdy składa się z $n-1$ równań o $n-1$ niewiadomych. Wskaźnik j, występujący w (3.11), określa wówczas kolejne równania i-tego układu równań. Ponieważ w myśl założenia macierz A jest jedyna, więc układy równań (3.11) są układami Cramera, a zatem ich wspólna macierz współczynników przy niewiadomych.

$$[u_j^l - u_j^1], \quad l=2,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n-1 \tag{3.12}$$

jest nieosobliwa. Nietrudno sprawdzić, że wyznaczniki macierzy (3.12) oraz U są identyczne, zachodzi więc (3.6). Ostatni wreszcie związek (3.7) wynika natychmiast z równania (3.8) oraz nieosobliwości macierzy U i A.

Udowodniliśmy w ten sposób, że związki (3.5) - (3.7) są warunkami koniecznymi istnienia dokładnie jednej macierzy A grupy dps, spełniającej równanie (3.8). Związki te są też warunkami wystarczającymi. Rzeczywiście, ponieważ wyznaczniki macierzy U i (3.12) są równe, zatem z założenia (3.6) oraz równań (3.11) wynika istnienie jedynej macierzy dps A kształtu (3.9) (niekoniecznie nieosobliwej) i takiej, że odpowiednie elementy macierzy AU oraz $\bar{U}$, nie występujące w pierwszych wierszach i kolumnach, są sobie równe. Z równości $A\mathcal{E} = \mathcal{E}$ wynika identyczność elementów pierwszych kolumn tych macierzy. Aby dowieść dalszych równości pomiędzy pozostałymi, odpowiednimi elementami macierzy AU oraz U, zauważmy że elementy występujące w pierwszym wierszu iloczynu AU są postaci

$$v_k^1 = \Big(2-n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\Big) u_k^1 + \Big(1- \sum_{i=2}^{n} a_{i2}\Big) u_k^2 + \ldots + \Big(1- \sum_{i=2}^{n} a_{in}\Big) u_k^n,$$

czyli

$$v_k^1 = S_k + (1-n)\, u_k^1 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\, u_k^1 - \sum_{i,l=2}^{n} a_{il}\, u_k^l. \tag{3.13}$$

Ponieważ jednak na mocy (3.10)

$$\sum_{i=2}^{n} u_k^i = (n-1)\, u_k^1 - \sum_{i,l=2}^{n} a_{il}\, u_k^1 + \sum_{i,l=2}^{n} a_{il}\, u_k^l,$$

więc wobec (3.13) i założenia (3.5) otrzymujemy

$$v_k^1 = S_k - \sum_{i=2}^{n} \bar{u}_k^i = S_k - \bar{S}_k + \bar{u}_k^1 = \bar{u}_k^1,$$

a zatem macierze AU oraz $\bar{U}$ mają wszystkie odpowiednie elementy równe, czyli zachodzi (3.8), przy czym $A \in DS(n,R)$, bowiem założenia (3.6) i (3.7) zapewniają nieosobliwość macierzy A. W ten sposób dostateczność warunków (3.5) - (3.7) została w pełni dowiedziona, co kończy dowód lematu.

4. Jak wiadomo n-wymiarowa geometria afiniczna (3.1) jest (n+1)-orientalna (p. [3], s. 367 oraz [6]). Grupa afiniczna GA(n,R) jest zorientowana przez podgrupę

$$H := \left\{(A,a) : A \in GL(n,R,\ \det A > 0,\ a \in R^n\right\},$$

zaś ciąg

$$\left\{P_0, P_1, \ldots, P_n\right\} \tag{4.1}$$

n+1 punktów $p_i = [p_i^l]$, $i = 0,1,\dots,n$ jest reperem rzędu n+1, jeśli spełnia warunek

$$\det\left[p_1 - p_0,\ p_2 - p_0,\ \dots,\ p_n - p_0\right] \neq 0 \tag{4.2}$$

Zbiór $\mathfrak{m}_{n+1}$ wszystkich takich reperów jest włóknem tranzytywnym odpowiedniego obiektu produktowego. Każdy z podzbiorów

$$\mathfrak{m}^+_{n+1} := \left\{(p_0,p_1,\dots,p_n) : \det\left[p_1-p_0,\dots,p_n-p_0\right] > 0\right\}$$

$$\mathfrak{m}^-_{n+1} := \left\{(p_0,p_1,\dots,p_n) : \det\left[p_1-p_0,\dots,p_n-p_0\right] < 0\right\}$$

stanowi (n+1)-orientację.

Geometria dps n-wymiarowa (3.3) jest również (n+1)-orientowalna, jako podgeometria geometrii afinicznej. Wynika to natychmiast z lematu 2.2, ponieważ grupa GDS(n,R) jest zorientowana przez podgrupę

$$\tilde{H} := \left\{(A,a) : A \in DS(n,R),\ \det A > 0,\ a \in R^n\right\},$$

oraz istnieją w tej geometrii repery rzędu n+1. Są nimi również ciągi (4.1), spełniające warunek (4.2), bowiem DS(n,R) jest podgrupę GL(n,R). Zbiór $\mathfrak{m}_{n+1}$ wszystkich reperów nie jest jednak włóknem tranzytywnym. Na mocy lematu 3.1 podzbiór $\tilde{\mathfrak{m}}_{n+1} \subset \mathfrak{m}_{n+1}$ złożony z reperów (4.1), spełniających warunki

$$p_1 - p_0 = \mathcal{E}\ ,\quad \sum_{l=1}^{n} (p_i^l - p_0^l) = 1 \quad \text{dla } i=2,3,\dots,n$$

($\mathcal{E}$ jest macierzą jednokolumnową złożoną z samych jedynek) jest już włóknem tranzytywnym. Wobec tego (n+1)-orientacją geometrii dps jest każdy z podzbiorów:

$$\tilde{\mathfrak{m}}^+_{n+1} := \tilde{\mathfrak{m}}_{n+1} \cap \mathfrak{m}^+_{n+1},\quad \tilde{\mathfrak{m}}^-_{n+1} := \tilde{\mathfrak{m}}_{n+1} \cap \mathfrak{m}^-_{n+1}\ .$$

Dla $s < n+1$ geometria afiniczna n-wymiarowa nie jest s-orientowalna, ponieważ dla $s < n+1$ nie istnieją w tej geometrii repery rzędu s. Okazuje się jednak, że n-wymiarowa geometria dps, w przeciwieństwie do afinicznej, jest ponadto n-orientowalna. Rzeczywiście, ponieważ dla dowolnej macierzy $A \in DS(n,R)$ zachodzi równość $A\mathcal{E} = \mathcal{E}$, gdzie $\mathcal{E}$ jest jednokolumnową macierzą, elementami której są same jedynki, zatem każdy ciąg

$$\left\{p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n\right\} \tag{4.3}$$

n punktów $p_i = [p_i^l] \in R^n$, spełniający warunek

$$\det[\mathcal{E}, p_2-p_1, \dots, p_n-p_1] \neq 0 \tag{4.4}$$

jest reperem rzędu n. Ponadto grupa GDS(n,R) jest orientowalna, więc z lematu 2.2 wynika n-orientowalność rozważanej geometrii (3.3). Z lematu 3.1 natomiast wynika, że zbiór $\mathfrak{m}_n$ ciągów (4.3) spełniających warunki (4.4) oraz

$$\sum_{l=1}^{n} (p_i^l - p_1^l) = 1 \quad \text{dla } i=2,3,\dots,n \tag{4.5}$$

jest włóknem tranzytywnym odpowiedniego częściowego obiektu produktowego. Wynika stąd, że n-orientację geometrii (3.3) stanowi każdy z podzbiorów $\mathfrak{m}_n^+$, $\mathfrak{m}_n^-$. Pierwszy z nich składa się z takich ciągów (4.3), spełniających warunek (4.5), że wyznacznik (4.4) jest dodatni, a drugi zawiera te ciągi (4.3) spełniające (4.5), dla których wyznacznik ten jest ujemny. W ten sposób udowodniliśmy, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1

Geometria podwójnie pseudostochastyczna n-wymiarowa jest n-orientowalna, a także (n+1)-orientowalna.

LITERATURA

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, Colloq. Math. 26 (1972), 271-279.

[2] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, Demonstratio Math. 7 (3) (1974), 381-402.

[3] Kucharzewski M.: Uber die Orientierung der Kleinschen Geometrien, Ann. Polon. Math. 29 (1975), 363-371.

[4] Kucharzewski M.: O pojęciu orientacji geometrii Kleina, Zeszyty Naukowe AGH Nr 596, Mat.-Fiz.-Chem. 31, Kraków 1978, 93-100.

[5] Kucharzewski M.: Uwagi do pojęcia orientacji geometrii Kleina, Zeszyty Naukowe Pol.Śl., Mat.-Fiz. (w druku).

[6] Kucharzewski M.: Orientability of n-dimensional projective geometry, Dem. Math., (w druku).

[7] Kucharzewski M., Szociński B.: Uber eine kanonische Form der regularen doppelt pseudostochastischen Matrizen, Prace Naukowe U. Śl., Prace Mat. IV (1973), 35-43.

[8] Moszner Z., Tabor J.: Sur la notion du biscalaire, Ann. Polon. Math. 19 (1967), 323-330.

ОРИЕНТИРОВАНИЕ ВДВОЙНЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Р е з ю м е

В этой работе показано что n-размерная вдвойне псевдослучайная геометрия является ориентируемой ряда n.

THE ORIENTATION OF DOUBLY PSEUDOSTOCHASTIC GEOMETRY

S u m m a r y

In this paper has been shown that the n-dimensional doubly pseudostochastic geometry is orientable of the order n.