ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Halina SZOPA

O PEWNEJ WARIACJI FUNKCJI WYMIERNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono lemat dotyczący budowy dowolnej funkcji wymiernej, rzeczywistej na okręgu koła jednostkowego tzw. funkcji wymiernej specjalnej uogólnionej. Podano również wariację takich funkcji polegającą na dowolnej zmianie wartości funkcji w zerach jej pochodnej.

WSTĘP

Przedmiotem pracy są funkcje wymierne, rzeczywiste na okręgu koła jednostkowego i ich wariacje. Pewna podklasa tych funkcji, a mianowicie takie funkcje wymierne, rzeczywiste na okręgu jednostkowym, których jedynymi biegunami są 0 i ∞, gra zasadniczą rolę w metodzie funkcji algebraicznych, stworzonej przez Z. Charzyńskiego w [1] i stosowanej później przez niego i przez wielu innych autorów do badania odwzorowań konforemnych obszarów jednospójnych.

Wariacja funkcji omawianej klasy, która polega na dowolnej zmianie wartości funkcji w zerach jej pochodnej, gra w metodzie funkcji algebraicznych rolę wariacji funkcji Greena, przy pomocy której, jak wiadomo, otrzymuje się wariację funkcji jednolistnej. Jednakże klasa funkcji wymiernych, rzeczywistych na okręgu jednostkowym, o jedynych biegunach w 0 i ∞, jest zbyt uboga, by można było metodę funkcji algebraicznych stosować do badania przekształceń konforemnych obszarów wielospójnych. Stąd zrodził się pomysł przeniesienia wspomnianej wyżej wariacji na funkcje wymierne, rzeczywiste na okręgu jednostkowym, o dowolnej ilości biegunów położonych gdziekolwiek.

Funkcją wymierną specjalną uogólnioną nazywać będziemy każdą funkcję wymierną $W(z)$, która jest rzeczywista na okręgu $K^*(0, 1)$.

Stopniem γ funkcji $W(z)$ nazywamy liczbę równą sumie krotności jej biegunów.

Lemat

Dowolną funkcję wymierną specjalną uogólnioną $W(z)$ napisać można w postaci:

$$W(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{E_s}{z^s} + \bar{E}_s z^s\right) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[B_{kl} \left(\frac{z + a_k}{z - a_k}\right)^l + \bar{B}_{kl} \left(\frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z}\right)^l\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \hat{B}_{pq} \left(i \frac{z + e^{i\omega_p}}{z - e^{i\omega_p}}\right)^q + B_o, \tag{1.1}$$

gdzie $\hat{B}_{pq}$, B_o i ω_p są rzeczywiste.

<u>Dowód</u>

Z tożsamości

$$\overline{W(z)} = \overline{W\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

wynika, że jeżeli $a_k \in K(0,1)$ jest biegunem funkcji $W(z)$ krotności l_k, to $\frac{1}{\bar{a}_k}$ jest również biegunem funkcji $W(z)$ tej samej krotności: w szczególności, jeżeli 0 jest biegunem krotności S, to ∞ jest również biegunem krotności S.

Niech

$$0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_k,$$

będą wszystkimi biegunami funkcji $W(z)$, położonymi w $K(0,1)$, o krotnościach odpowiednio

$$S,\ l_1,\ l_2, \ldots, l_k,$$

$$a \quad e^{i\omega_1},\ e^{i\omega_2}, \ldots, e^{i\omega_p},$$

- biegunami leżącymi na $K^*(0, 1)$, o krotnościach odpowiednio

$$q_1,\ q_2, \ldots, q_p$$

Ze względu na uczynioną na początku dowodu uwagę, $W(z)$ ma postać

$$W(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{\alpha_s}{z^s} + \beta_s z^s\right) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[\beta_{kl} \frac{1}{(z - a_k)^l} + \gamma_{kl} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{\bar{a}_k}\right)^l}\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \left[\delta_{pq} \frac{1}{(z - e^{i\omega_p})^q}\right] + \omega_o.$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcję $W_1(z)$ postaci (1.1), gdzie współczynniki E_s, B_{kl}, $\hat{B}_{pq}$ i B_0 są tak dobrane, by części główne odpowiadające biegunom 0, a_k, $e^{i\omega_p}$ w rozwinięciu funkcji $W_1(z)$ były równe odpowiednim częściom głównym w rozwinięciu funkcji $W(z)$. Należy w tym celu przyjąć

$$E_s = \alpha_s, \quad s = 1,\dots,S;$$

B_{kl}, $l = 1,\dots,l_k$, wyznaczamy kolejno ze wzorów

$$B_{kl_k}(2\,a_k)^{l_k} = \beta_{kl_k} .$$

$$\left[B_{kl_k-1} + \binom{l_k}{l_k-1} B_{kl_k}\right] (2\,a_k)^{l_k-1} = \beta_{kl_k-1}.$$

$$\left[B_{kl_k-2} + \binom{l_k-1}{l_k-2} B_{kl_k-1} + \binom{l_k}{l_k-2} B_{kl_k}\right] (2a_k)^{l_k-2} = \beta_{kl_k-2} ,$$

....

$$\left[B_{k1} + \binom{2}{1} B_{k2} + \binom{3}{2} B_{k3} + \dots + \binom{l_k}{1} B_{kl_k}\right] (2a_k) = \beta_{k1}, \quad k = 1,\dots K.$$

$\hat{B}_{pq}$, $q = 1, \dots , q_p$, wyznaczamy ze wzorów analogicznych.

Funkcja

$$W_2(z) = W(z) - W_1(z),$$

jako holomorficzna w $\overline{K(0,\ 1)}$ i rzeczywista na $K^*(0,\ 1)$ jest stała, przy czym stała ta jest rzeczywista.

Udowodniliśmy tym samym, że $W(z)$ jest postaci (1.1).

Jeżeli 0 nie jest biegunem funkcji $W(z)$, to pierwsza suma w przedstawieniu (1.1) oczywiście nie występuje. Niech teraz $W(z)$ będzie funkcją wymierną specjalną uogólnioną postaci (1.1), przy czym

$$E_s \neq 0, \ B_{kl_k} \neq 0, \ k = 1, \dots , K, \ \hat{B}_{pq_p} \neq 0, \quad p = 1, \dots , P.$$

Stopień $W(z)$ wynosi zatem

$$2S + 2 \sum_{k=1}^{K} l_k + \sum_{p=1}^{P} q_p .$$

Funkcja i z W'(z) jest także funkcją wymierną specjalną uogólnioną, o tych samych biegunach co funkcja W(z), jedynie krotność każdego bieguna, z wyjątkiem biegunów w 0 i ∞, wzrasta o 1. Stopień i z W (z) wynosi zatem

$$2S + 2 \sum_{k=1}^{K} l_k + \sum_{p=1}^{P} q_p + 2K + P. \tag{1.2}$$

Niech

$$\zeta_o, \quad _1, \ldots, \zeta_Q, \tag{1.3}$$

oznaczają pierwiastki W (z) położone w K(0, 1) i

$$\zeta_o, \zeta_1, \ldots, \zeta_Q, \tag{1.3}$$

ich krotności, a

$$e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_R} \tag{1.4}$$

- pierwiastki położone na $K^*(0, 1)$ i

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_R \tag{1.4'}$$

ich krotności. Ponieważ ilość zer funkcji W'(z), tym samym i funkcji i z W'(z), jest taka sama jak stopień funkcji i z W'(z), stąd

$$2 \sum_{j=1}^{Q} \zeta_j + \sum_{j=1}^{R} \eta_j = 2S + 2 \sum_{k=1}^{K} l_k + \sum_{p=1}^{P} q_p + 2K + P. \tag{1.5}$$

Niech

$$s_j(t) - \delta < t < \delta, \; j = 1, \ldots, Q,$$

będzie układem funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej t, klasy C_1, takich że

$$S_j(0) = W(\zeta_j), \quad j = 1, \ldots, Q,$$

oraz niech $\sigma(t)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej t, taką, że

$$\sigma(0) = \arg E_s.$$

Lemat

Dla każdego t dostatecznie bliskiego 0 istnieje funkcja wymierna specjalna uogólniona W(z, t) postaci

$$W(z,\ t) = \sum_{s=1}^{S} \left[\frac{E_s(t)}{z^s} + \bar{E}_s(t)\ z^s \right] + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[B_{kl}(t) \left(\frac{z + a_k(t)}{z - a_k(t)} \right)^l + \right.$$

$$\left. + \overline{B_{kl}(t)} \left(\frac{\overline{1 + a_k(t)z}}{\overline{1 - a_k(t)z}} \right)^l \right] + \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \hat{B}_{pq}(t)\ \times$$

$$\times \left(i\ \frac{z + e^{i\omega_p(t)}}{z - e^{i\omega_p(t)}} \right)^q + B_0(t),$$

gdzie

$$E_s(t),\quad B_{kl}(t),\quad \hat{B}_{pq}(t),\quad B_0(t), \tag{1.7}$$

$$a_k(t),\quad \omega_p(t), \tag{1.8}$$

są dowolnie bliskie odpowiednim współczynnikom i biegunom funkcji $W(z)$, oraz istnieje układ liczb

$$\zeta_1(t),\quad \zeta_2(t),\ \ldots\ ,\ \zeta_Q(t), \tag{1.9}$$

$$e^{i\varphi_1(t)},\quad e^{i\varphi_2(t)},\ \ldots\ ,\ e^{i\varphi_R(t)}, \tag{1.10}$$

dowolnie bliskich liczbom (1.3), (1.4), takie, że

i) $W(z,\ 0) = W(z)$

$\zeta_j(0) = \zeta_j,\quad j = 1,\ \ldots\ ,\ Q,$

$e^{i\varphi_j(0)} = e^{i\varphi_j},\quad j = 1,\ \ldots\ ,\ R,$

ii) $W(\zeta_j(t),\ t) = s_j(t),\quad j = 1,\ \ldots\ ,\ Q,$

$W(e^{i\varphi_j(t)},\ t) = W(e^{i\varphi_j}),\quad j = 1,\ \ldots\ ,\ R,$

$W^{(m)}(\zeta_j(t),\ t) = 0,\quad m = 1,\ \ldots\ ,\ \xi_j,$

$W^{(\xi_j+1)}(\zeta_j(t),\ t) \neq 0,\ j = 1,\ \ldots\ ,\ Q,$

$$W^{(m)}(e^{i\varphi_j(t)}, t) = 0, \quad m = 1, \dots, \eta_j,$$

$$W^{(\eta_j+1)}(e^{i\varphi_j(t)}, t) \neq 0, \quad j = 1, \dots, R,$$

$$\arg E_s(t) = \sigma(t),$$

iii) liczby (1.7) - (1.10) są wyznaczone jednoznacznie,

iv) funkcje (1.7) - (1.10) są funkcjami klasy C_1 zmiennej t.

Dowód

Istnienie dla t dostatecznie bliskiego zera, dokładnie jednego układu liczb (1.7) - (1.10) spełniających warunki i), ii), iii) jest równoważne z istnieniem dla t dostatecznie bliskiego zera dokładnie jednego rozwiązania układu równań rzeczywistych:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot W(\dot\zeta_j) &= \operatorname{Re} s_j(t), \qquad (1.11)\\ \operatorname{Im} \dot W(\dot\zeta_j) &= \operatorname{Im} s_j(t), \qquad (1.11')\end{aligned}\right\} \quad j = 1, \dots, Q,$$

$$\dot W(e^{i\dot\varphi_j}) = W(e^{i\varphi_j}), \qquad j = 1, \dots, R, \tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot W^{(m)}(\dot\zeta_j) &= 0, \qquad (1.13)\\ \operatorname{Im} \dot W^{(m)}(\dot\zeta_j) &= 0, \qquad (1.13')\end{aligned}\right\} \quad m = 1,\dots,\xi_j, \; j = 1,\dots,Q,$$

$$i\,(e^{i\dot\varphi_j}\, \dot W^{(m)}(e^{i\dot\varphi_j}) = 0, \quad m = 1,\dots,\eta_j, \; j = 1,\dots,R, \tag{1.14}$$

$$\arg \dot E_s = \sigma(t), \tag{1.15}$$

gdzie

$$\dot W(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{\dot E_s}{z^s} + \bar{\dot E}_s z^s\right) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[\dot B_{kl} \left(\frac{z + \dot a_k}{z - \dot a_k}\right)^l + \right.$$

$$\left. + \bar{\dot B}_{kl} \left(\frac{1 + \bar{\dot a}_k z}{1 - \bar{\dot a}_k z}\right)^l \right] + \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \hat{\dot B}_{pq} \left(i\,\frac{z + e^{i\dot\omega_p}}{z - e^{i\dot\omega_p}}\right)^q + S_0, \tag{1.16}$$

o niewiadomych rzeczywistych

$$\dot\alpha_{1s}, \quad \dot\alpha_{2s}, \quad \dot E_s = \dot\alpha_{1s} + i\dot\alpha_{2s}, \quad s = 1, \dots, S, \tag{1.17}$$

$$\dot{\beta}_{1kl},\quad \dot{\beta}_{2kl},\quad \dot{\beta}_{kl} = \dot{\beta}_{1kl} + i\dot{\beta}_{2kl},\quad l = 1, \dots, l_k,\ k = 1, \dots, K, \tag{1.18}$$

$$\dot{\hat{B}}_{pq},\quad q = 1, \dots, q_p,\quad p = 1, \dots, P, \tag{1.19}$$

$$\dot{B}_o, \tag{1.20}$$

$$\dot{\varrho}_k,\quad \dot{\theta}_k,\quad \dot{a}_k = \dot{\varrho}_k e^{i\dot{\theta}_k},\quad k = 1, \dots, K, \tag{1.21}$$

$$\dot{\omega}_p,\quad p = 1, \dots, P, \tag{1.22}$$

$$\dot{r}_j,\quad \dot{\vartheta}_j,\quad \dot{\zeta}_j = \dot{r}_j e^{i\dot{\vartheta}_j},\quad j = 1, \dots, Q, \tag{1.23}$$

$$\dot{\varphi}_j,\quad j = 1, \dots, R, \tag{1.24}$$

dowolnie bliskiego odpowiednim wartościom początkowym tych niewiadomych:

$$\alpha_{1s},\quad \alpha_{2s},\quad E_s = \alpha_{1s} + i\,\alpha_{2s},\quad s = 1, \dots, S, \tag{1.17'}$$

$$\beta_{1kl},\quad \beta_{2kl},\quad \beta_{kl} = \beta_{1kl} + i\beta_{2kl},\quad l = 1, \dots, l_k,\ k = 1, \dots, K, \tag{1.18'}$$

$$\hat{B}_{pq},\quad q = 1, \dots, q_p,\quad p = 1, \dots, P, \tag{1.19'}$$

$$B_o, \tag{1.20'}$$

$$\varrho_k,\quad \theta_k,\quad a_k = \varrho_k e^{i\theta_k},\quad k = 1, \dots, K, \tag{1.21'}$$

$$\omega_p,\quad p = 1, \dots, P, \tag{1.22'}$$

$$r_j,\quad \vartheta_j,\quad \zeta_j = r_j e^{i\vartheta_j},\quad j = 1, \dots, Q, \tag{1.23'}$$

$$\varphi_j,\quad j = 1, \dots, R. \tag{1.24'}$$

Aby udowodnić istnienie dokładnie jednego rozwiązania układu (1.11) - (1.15), wystarcza udowodnić, że jakobian lewych stron (1.11) - (1.15) względem niewiadomych (1.17) - (1.24), obliczony dla wartości początkowych (1.17') - (1.24'), jest różny od zera. Załóżmy, że w kolejnych wierszach jakobianu występują pochodne cząstkowe kolejnych lewych stron(1.11) - (1.15) względem niewiadomych (1.17) - (1.24).

Dla dowodu przypuśćmy przeciwnie, że jakobian ten jest równy zeru. Istniałby wówczas nietrywialny układ liczb rzeczywistych

$$\Delta\alpha_{1s},\quad \Delta\alpha_{2s},\quad s = 1, \dots , S, \tag{1.17''}$$

$$\Delta\beta_{1kl},\quad \Delta\beta_{2kl},\quad l = 1, \dots , l_k,\quad k = 1, \dots , K, \tag{1.18''}$$

$$\Delta\hat{B}_p,\quad q = 1, \dots , q_p,\quad p = 1, \dots , P, \tag{1.19''}$$

$$\Delta B_o, \tag{1.20''}$$

$$\Delta\varrho_k,\quad \Delta\theta_k,\quad k = 1, \dots , K, \tag{1.21''}$$

$$\Delta\omega_p,\quad p = 1, \dots , P, \tag{1.22''}$$

$$\Delta r_j,\quad \Delta\psi_j,\quad j = 1, \dots , Q, \tag{1.23''}$$

$$\Delta\varphi_j,\quad j = 1, \dots , R, \tag{1.24''}$$

taki, że suma iloczynów elementów każdego wiersza jakobianu przez te liczby byłaby równa zeru. Obliczając z (1.11) - (1.15) elementy jakobianu i wykonując opisane wyżej działania, po prostej przeróbce, otrzymujemy:

$$\sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}} + \Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\beta}_{1kl}} + \Delta\beta_{2kl}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\hat{B}}_{pq}}\right) + \Delta B_o\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{B}_o} +$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\varrho}_k} + \Delta\theta_k\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\theta}_k}\right) + \sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\omega}_p}\right) +$$

$$+\Delta r_j\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial r_j} + \Delta\psi_j\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\psi_j} = 0,\quad j = 1, \dots , Q, \tag{1.25}$$

$$\sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\varphi}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}}+\Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\dot{W}(\dot{\varphi}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\beta}_{1kl}}+\Delta\beta_{2kl}\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{B}_{pq}}\right)+\Delta B_o\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{B}_o}+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\varrho}_k}+\Delta\theta_k\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\theta}_k}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\omega}_p}+\Delta\varphi_j\frac{\partial\dot{W}(e^{i\dot{\varphi}_j})}{\partial\dot{\varphi}_j}\right.;\quad j=1,\dots,R, \tag{1.26}$$

$$\sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}}+\Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\beta}_{1kl}}+\Delta\beta_{2kl}\frac{\partial W^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{B}_{pq}}\right)+\Delta B_o\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{B}_o}+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\varrho}_k}+\Delta\theta_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\theta}_k}\right)+\sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\omega}_p}\right)+$$

$$+\Delta r_j\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{r}_j}+\Delta v_j\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{v}_j}=0,\quad \begin{matrix}m=0,\dots,\zeta_j,\\ j=1,\dots,Q,\end{matrix} \tag{1.27}$$

$$\sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\alpha}_{1s}}+\Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\beta}_{1kl}}+\Delta\beta_{2kl}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\hat{B}_{pq}}\right)+\Delta B_o\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{B}_o}+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\varrho}_k}+\Delta\theta_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\theta}_k}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{\omega}_p}\right)+\Delta\varphi_j\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\varphi_j}=0,$$

$$m=1,\ \ldots,\ \eta_j,\quad j=1,\ \ldots,\ R, \tag{1.28}$$

$$\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\arg\dot{E}_s}{\partial\dot{\alpha}_{1s}}+\Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\arg\dot{E}_s}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}=0. \tag{1.29}$$

Ze względu na równości

$$\frac{\partial\dot{W}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{B}_o}=1,\quad j=1,\ \ldots,\ Q,\quad \frac{\partial(\dot{W}(e^{i\varphi_j})}{\partial\dot{B}_o}=1,\ j=1,\ \ldots\ R, \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{r}_j}=\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial\dot{\nu}_j}=0,\quad m=0,\ \ldots,\ \xi_j-1,\ j=1,\ \ldots,\ Q, \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(e^{i\varphi_j})}{\partial\varphi_j}=0,\ m=0,\ \ldots,\ \eta_j-1,\ j=1,\ \ldots,\ R,$$

$$(\dot{W}^{(0)}(z)=\dot{W}(z)), \tag{1.31'}$$

Dla wartości początkowych (1.17 - 1.24) związki (1.25-1.28) ulegają odpowiedniemu uproszczeniu. Weźmy pod uwagę funkcję:

$$\Delta W(z) = \sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}} + \Delta\alpha_{s}\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\beta}_{1kl}} + \Delta\beta_{2kl}\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\hat{B}_{pq}}\right) + \Delta B_o + \sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\varrho}_k} +\right.$$

$$\left.+\Delta\theta_k\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\theta}_k}\right) + \sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\dot{\omega}_p}\right),$$

gdzie wszystkie pochodne obliczone są dla wartości

$$\alpha_{1s},\ \alpha_{2s},\ \beta_{1kl},\ \beta_{2kl},\ \hat{B}_{pq},\ \varrho_k,\ \Theta_k,\ \omega_p.$$

Ze względu na fakt, że

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{\partial\dot{W}(z)}{\partial\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\dot{W}^{(m)}(z),$$

gdzie σ jest jedną ze zmiennych (1.17) - (1.24), mamy

$$\frac{d^m\,\Delta W(z)}{dz^m} = \sum_{s=1}^{S}\left(\Delta\alpha_{1s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\alpha}_{1s}} + \Delta\alpha_{2s}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\alpha}_{2s}}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\Delta\beta_{1kl}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\beta}_{1kl}} + \Delta\beta_{2kl}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\beta}_{2kl}}\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{q_p}\left(\Delta\hat{B}_{pq}\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\hat{B}_{pq}}\right) + \sum_{k=1}^{K}\left(\Delta\varrho_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\varrho}_k} +\right.$$

$$\left.+\Delta\Theta_k\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\theta}_k}\right) + \sum_{p=1}^{P}\left(\Delta\omega_p\frac{\partial\dot{W}^{(m)}(z)}{\partial\dot{\omega}_p}\right);$$

Łatwy rachunek wykazuje, że

$$\Delta W(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(\frac{\Delta E_s}{z^s} + \Delta \bar{E}_s z^s\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[\Delta B_{kl} \left(\frac{z + a_k}{z - a_k}\right)^l + \overline{\Delta B_{kl}} \left(\frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z}\right)^l\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \left[\Delta \hat{B}_{pq} \left(i \frac{z + e^{i\omega_p}}{z - e^{i\omega_p}}\right)^q\right] +$$

$$+ \Delta B_0 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{l_k} \left[l B_{kl} \Delta a_k \left(\frac{z + a_k}{z - a_k}\right)^{l-1} \frac{2z}{(z - a_k)^2} +\right.$$

$$\left.+ \overline{l B_{kl} \Delta a_k} \left(\frac{1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z}\right)^{l-1} \frac{2z}{(1 - \bar{a}_k z)^2}\right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{q_p} \left[- q \hat{B}_{pq} \left(i \frac{z + e^{i\omega_p}}{z - e^{i\omega_p}}\right)^{q-1} \frac{2z e^{i\omega_p} \Delta\omega_p}{(z - e^{i\omega_p})^2}\right],$$

gdzie:

$$\Delta E_s = \Delta\alpha_{1s} + i \Delta\alpha_{2s},$$

$$\Delta\beta_{kl} = \Delta\beta_{1kl} + i \Delta\beta_{2kl},$$

$$\Delta a_k = (\Delta\varrho_k + i \varrho_k \Delta\theta_k) e^{i\theta_k},$$

skąd natychmiast wynika, że $\Delta W(z)$ jest funkcją wymierną specjalną uogólnioną, której stopień nie przekracza liczby (1.2). Z (1.25),(1.26),(1.27) i (1.28), uwzględniając równości (1.30), (1.31), (1.31'), wnioskujemy, że punkty (1.3), (1.4) są dla funkcji $\Delta W(z)$ zerami krotności odpowiednio (1.3') i (1.4'). Gdyby stopień funkcji $\Delta W(z)$ był równy liczbie (1.2), to $\Delta W(z)$ byłaby funkcją tego samego stopnia, o tych samych biegunach i o tych samych zerach, uwzględniając oczywiście także ich krotności, co funkcja i $W'(z)$.

Musiałoby być zatem

$$\frac{\Delta W(z)}{i\, z\, W'(z)} = C,$$

gdzie C jest stałą rzeczywistą. Wartość C obliczamy następująco:

$$C = \frac{\Delta W(z)}{i\, z\, W'(z)} = \frac{z^s \Delta W(z)}{z^s i\, z\, W'(z)} = \frac{\left\{z^s\ \Delta W(z)\right\}_{z=0}}{\left\{z^s i\, z\, W'(z)\right\}_{z=0}} = \frac{\Delta E_s}{-iS\, E_s}.$$

Łatwo sprawdzić, że równość (1.29) jest równoważna związkowi

$$\arg \Delta E_s = \arg E_s$$

Aby stosunek $\frac{E_s}{-iSE_s}$ był liczbą rzeczywistą, konieczne jest zatem, by

$$E_s = 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczności z przypuszczeniem, że stopień funkcji $\Delta W(z)$ jest równy (1.2); jest więc mniejszy niż (1.2). W tym jednak wypadku $\Delta W(z)$ jako funkcja wymierna mająca więcej zer niż wynosi jej stopień, jest tożsamościowo równa zeru, a stąd obliczając współczynniki przy $(z - a_k)^{-(l_k+1)}$ i przy $(z - e^{i\omega_p})^{-(q_p+1)}$ w rozwinięciu Laurenta funkcji $\Delta W(z)$, dochodzimy najpierw do wniosku, że

$$\Delta a_k = 0,\quad k = 1, \dots, K,\quad \Delta\omega_p = 0,\quad p = 1, \dots P, \tag{1.32}$$

następnie obliczając analogiczne współczynniki przy $(z - a_k)^{-l_k}$, $(z - a_k)^{-(l_k-1)}, \dots, (z - e^{i\omega_p})^{-q_p}$, $(z - e^{i\omega_p})^{-(q_p-1)}, \dots$ oraz przy z^{-s}, $z^{-(s-1)}, \dots$, otrzymujemy kolejno

$$\Delta B_{kl_k} = \Delta B_{kl_k-1} = \dots = \Delta B_{kl} = 0,\ k = 1, \dots, K, \tag{1.33}$$

$$\Delta \hat{B}_{pq_p} = \Delta \hat{B}_{pq_p-1} = \dots = \Delta \hat{B}_{p1} = 0,\ p = 1, \dots, P, \tag{1.34}$$

$$\Delta E_s = \Delta E_{s-1} = \dots = \Delta E_1 = 0, \tag{1.35}$$

$$\Delta B_o = 0. \tag{1.36}$$

Tak więc wykazaliśmy, że wszystkie liczby (1.17") - (1.22") muszą być równe zeru. Pozostaje udowodnić to samo o liczbach (1.23") i (1.24").

Związki (1.27) i (1.28), ze względu na (1.32) - (1.36), dla $m = \xi_j$ względnie $m = \eta_j$ przyjmują postać

$$\Delta r_j \frac{\partial \dot{W}^{(\xi_j)}(\zeta_j)}{\partial \dot{r}_j} + \Delta \psi_j \frac{\partial \dot{W}^{(\xi_j)}(\dot{\zeta}_j)}{\partial \dot{\psi}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, Q,$$

względnie postać

$$\Delta \varphi_j \frac{\partial \dot{W}^{(\eta_j)}(e^{i\varphi_j})}{\partial \dot{\varphi}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, R.$$

Z ostatniego związku wynika od razu

$$\Delta \varphi_j = 0, \quad j = 1, \dots, R, \tag{1.37}$$

bo
$$\frac{\partial \dot{W}^{(\eta_j)}(e^{i\varphi_j})}{\partial \dot{\varphi}_j} = \dot{W}^{(\eta_j+1)}(e^{i\varphi_j}) \; i \; e^{i\varphi_j} \neq 0, \quad j = 1, \dots, R.$$

Pierwszy związek jest równoważny związkowi

$$\Delta r_j \dot{W}^{(\xi_j+1)}(\zeta_j) e^{i\psi_j} + \Delta \psi_j \dot{W}^{(\xi_j+1)}(\zeta_j) \, i \, r_j e^{i\psi_j} = 0,$$

$$j = 1, \dots, Q,$$

a ponieważ

$$W^{(\xi_j+1)}(\zeta_j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, Q,$$

więc

$$\Delta r_j + \Delta \psi_j + r_j = 0,$$

skąd

$$\Delta r_j = 0, \quad \Delta \psi_j = 0, \quad j = 1, \dots, Q, \text{ bo } r_j \neq 0. \tag{1.38}$$

Tak więc z (1.32) - (1.38) wynika, że wbrew założeniu, wszystkie liczby (1.17") - (1.24') są zerami. Rozpatrywany wyżej jakobian musi być zatem różny od zera i, co za tym idzie, dla t dostatecznie bliskich zera istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu równań (1.11) - (1.15) względem niewiadomych (1.17) - (1.24). Innymi słowy, w pewnym otoczeniu $(-\delta, \delta)$ punktu 0 istnieje układ funkcji (1.7) - (1.10) spełniających warunki i), ii), iii), iv). Co więcej układ ten jest wyznaczony jednoznacznie.

LITERATURA

[1] Charzyński Z.: Sur les fanctions univalentes algebriquec bornées, Diss. Math 10 (1955), 1-41.

О НЕКОТОРОЙ ВАРИАЦИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

Представлено лемму о изображении произвольной рациональной функции, действительной на окружности единичного круга, которая называется: рациональная специальная обобщёная функкйия. Рассмотрено тоже вариацию этих функций, которая основывается на любом изменении значений функции в нулях её производной.

ON THE VARIATION OF RATIONAL FUNCTION

S u m m a r y

In this paper the lemma which relatives the construction of rational function, real on the unit circle was presented. There was presented also the variation of this function, which depends on any change of values of function in zeros of its derivative.