ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Halina JONDRO

WARIACJE W PEWNEJ KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH

Streszczenie. Praca ta poświęcona jest otrzymaniu wzorów wariacyjnych dla pewnej podklasy klasy funkcji Gelfera, tj. dla takich funkcji jednolistnych w kole jednostkowym $U = \left\{z : |z| < 1\right\}$, które nie przyjmują jednocześnie wartości w, $-w$, $\pm\frac{i}{w}$.

Definicja

Klasą K_G nazywać będziemy zbiór funkcji jednolistnych w kole jednostkowym U postaci:

$$F(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots ,$$

spełniające dwa następujące warunki:

$$F(z_1) + F(z_2) \neq 0, \tag{1}$$

$$F(z_1) \cdot \overline{F(z_2)} \neq \pm i \tag{2}$$

dla każdych z_1, $z_2 \in U$.

Funkcjami klasy K_G są np. funkcje powstałe z funkcji klasy K - tj. klasy funkcji $f(z)$ postaci:

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots = b_1 (z + a_2 z^2 + \dots),$$

gdzie $0 < b_1 < 1$, jednolistnych w $U = \left\{z : |z| < 1\right\}$ i spełniających warunek $f(z_1) \cdot \overline{f(z_2)} \neq -1$ dla każdej pary z_1, $z_2 \in U$, w następujący sposób:

Jeżeli $f \in K$ oraz $d, -\frac{1}{\bar{d}} \notin f(U)$; wówczas funkcja

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - d}{1 + \bar{d} f(z)}}$$

należy do klasy K_G.

Twierdzenie 1

Niech $F \in K_G$ i niech Δ będzie obszarem spełniającym następujące warunki:

(a) $\partial F(U) \subset \Delta$

(b) Δ jest niezmienniczy ze względu na przekształcenia $w \to -w$, $w \to \frac{1}{\bar{w}}$, $w \to -\frac{1}{\bar{w}}$. (Δ nie musi być obszarem ograniczonym. W przypadku gdy $0 \in \partial F(U)$, Δ ze względu na (b) będzie obszarem nieograniczonym, dla którego ∞ jest punktem wewnętrznym).

Niech $\Phi(w)$ będzie funkcją holomorficzną w $\bar{\Delta}$ oraz taką, że dla każdego $w \in \Delta$:

$$\Phi(w) = \Phi(-w), \tag{3}$$

$$\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)} = -\Phi(w). \tag{4}$$

Z warunków (3) i (4) wynika warunek

$$\overline{\Phi\left(-\frac{1}{\bar{w}}\right)} = -\Phi(w). \tag{5}$$

Udowodnimy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego, funkcja

$$w^*(w) = we^{\varepsilon\Phi(w)}, \tag{6}$$

jest jednolistna w zbiorze Δ oraz dla każdego $w_1, w_2 \in \Delta \cap F(U)$ spełnia warunki:

$$w^*(w_1) + w^*(w_2) \neq 0, \tag{7}$$

$$w^*(w_1)\,\overline{w^*(w_2)} \neq \pm 1. \tag{8}$$

Dowód

Wprowadzamy funkcję:

$$\psi(w,\omega) = \begin{cases} \dfrac{w\Phi(w) - \omega\Phi(\omega)}{w-\omega}, & w \neq \omega, \\[2ex] \Phi(\omega) + \omega\Phi'(\omega), & w = \omega, \end{cases} \tag{9}$$

dla $w, \omega \in \bar{\Delta}$, $w, \omega \neq \infty$. Ponadto przyjmujemy, że $\psi(w,\omega) = \alpha_0$, gdy w lub ω równa się ∞. Funkcja $\psi(w,\omega)$ jako funkcja ciągła w zbiorze zwartym $\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$, jest ograniczona, istnieje zatem takie M, że $|\psi(w,\omega)| < M$ dla każdego $w, \omega \in \bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$.

Udowodnimy, że funkcja $w^*(w)$ jest jednolistna w Δ. Przypuśćmy, że dla dowolnie małych ε istnieją takie punkty $w_1, w_2 \in \Delta$, $w_1 \neq w_2$, że

$$w_1 \cdot e^{\varepsilon\Phi(w_1)} = w_2 \cdot e^{\varepsilon\Phi(w_2)}. \tag{10}$$

Z (10) otrzymujemy

$$w_1 \cdot e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(w_2)]} = w_2,$$

skąd

$$w_1(1 - e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(w_2)]}) = w_1 - w_2. \tag{11}$$

Korzystając z oszacowania $|1-e^s| \leq |s| \, e^{|s|}$, otrzymujemy

$$|w_1 - w_2| \leq |w_1||\varepsilon||w_1 - w_2|\left|\frac{\Phi(w_1) - \Phi(w_2)}{w_1 - w_2}\right| e^{|\varepsilon||\Phi(w_1) - \Phi(w_2)|},$$

skąd

$$1 \leq |\varepsilon|\left|\frac{w_1\Phi(w_1) - w_2\Phi(w_2) + w_2\Phi(w_2) - w_1\Phi(w_2)}{w_1 - w_2}\right| e^{|\varepsilon|\,|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)|}.$$

Ale z uwagi na (9) otrzymujemy

$$1 \leq |\varepsilon| e^{2|\varepsilon|M}(|\nu(w_1, w_2)| + |\Phi(w_2)|),$$

co jest niemożliwe ze względu na dowolność ε i ograniczoność obu składników w nawiasie.

Dowód własności (7). Przypuśćmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $w_1, w_2 \in \Delta \cap F(U)$, takie że

$$w^*(w_1) + w^*(w_2) = 0,$$

czyli

$$w_1 e^{\varepsilon\Phi(w_1)} + w_2 e^{\varepsilon\Phi(w_2)} = 0,$$

Wówczas

$$w_1 e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(-w_2)]} = -w_2,$$

skąd

$$w_1(1 - e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(-w_2)]}) = w_1 + w_2.$$

Na mocy tej samej nierówności co wyżej, otrzymalibyśmy

$$|w_1 + w_2| \leq |w_1||\varepsilon||w_1 + w_2|\left|\frac{\Phi(w_1) - \Phi(-w_2)}{w_1 + w_2}\right| e^{|\varepsilon||\Phi(w_1) - \Phi(-w_2)|}. \tag{12}$$

Ale ze względu na to, że w_1; $w_2 \in F(U)$ $w_1 + w_2 \neq 0$, skracając zatem nierówność (12) przez $|w_1 + w_2|$, po takich przekształceniach jak w dowodzie jednolistności, otrzymujemy nierówność

$$1 \leq |\varepsilon| e^{2|\varepsilon|M}(|\psi(w_1, -w_2)| + |\Phi(-w_2)|),$$

co niemożliwe ze względu na dowolność ε i ograniczoność obu składników w nawiasie.

Dowód własności (8). Przypuśćmy podobnie jak wyżej, że

$$w_1 e^{\varepsilon\Phi(w_1)} \cdot \overline{w}_2 e^{\overline{\varepsilon\Phi(w_2)}} = i$$

dla pewnych $w_1, w_2 \in \Delta \cap F(U)$. Wówczas

$$w_1 e^{\varepsilon[\Phi(w_1) + \overline{\Phi(w_2)}]} = \frac{i}{\overline{w}_2},$$

skąd na podstawie (4) otrzymujemy

$$w_1 e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(\frac{i}{\overline{w}_2})]} = \frac{i}{\overline{w}_2}$$

i dalej

$$w_1 (1 - e^{\varepsilon[\Phi(w_1) - \Phi(\frac{i}{\overline{w}_2})]}) = w_1 - \frac{i}{\overline{w}_2}.$$

Na mocy tej samej nierówności co wyżej, otrzymalibyśmy

$$\left|w_1 - \frac{i}{\overline{w}_2}\right| \leq |w_1| |\varepsilon| \left|w_1 - \frac{i}{\overline{w}_2}\right| \left|\frac{\Phi(w_1) - \Phi(\frac{i}{\overline{w}_2})}{w_1 - \frac{i}{\overline{w}_2}}\right| e^{|\varepsilon| |\Phi(w_1) - \Phi(\frac{i}{\overline{w}_2})|}.$$

Ale $w_1, w_2 \in F(U)$, skąd $w_1 \overline{w}_2 \neq i$, a więc

$$1 < |\varepsilon| e^{2|\varepsilon|M}(|\psi(w_1, \frac{i}{\overline{w}_2})| + |\Phi(\frac{i}{\overline{w}_2})|),$$

a ta nierówność nie może zajść ze względu na dowolność ε i ograniczoność obu składników w nawiasie.

Dowód, że również druga część własności (8) jest spełniona, przebiega w sposób analogiczny.

W ten sposób twierdzenie jest udowodnione.

2. Skorzystamy z twierdzenia 1 dla otrzymania wariacji dla funkcji klasy K_G przy pomocy metody Gołuzina [2], str. 99-101.

Niech $F \in K_G$ i niech Δ będzie obszarem takim jak w twierdzeniu 1. Niech $0<r<1$ będzie na tyle bliskie 1, że $F(P) \subset \Delta$, gdzie $P = \{z : r < |z| < 1\}$. Połóżmy dla $z \in P$

$$F(z,\varepsilon) = w^*(F(z)) = F(z)e^{\varepsilon\Phi(z)},$$

gdzie $|\varepsilon|$ jest dostatecznie małe, np. niech $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. $F(z,\varepsilon)$ jest funkcją holomorficzną jako funkcja zmiennych zespolonych: ε w kole $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ i $z \in P$; dla każdego ε rzeczywistego, takiego że $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ jest funkcją jednolistną zmiennej $z \in P$. Ponadto, co wynika z (7) i (8), $F(z,\varepsilon)$ odwzorowuje pierścień P na obszar dwuspójny $F(P,\varepsilon)$ o następujących własnościach:

jeżeli

$$w_1, w_2 \in F(P,\varepsilon),$$

to

$$w_1 + w_2 \neq 0 \text{ i } w_1 \cdot \overline{w}_2 \neq \pm i.$$

Dołączmy teraz do obszaru dwuspójnego $F(P,\varepsilon)$ domknięcie składowej ograniczonej jego dopełnienia i tak otrzymany obszar jednospójny oznaczmy przez D_ε. Udowodnimy, że D_ε jest obszarem posiadającym następujące własności:

jeżeli

$$w_1, w_2 \in D_\varepsilon,$$

to

$$w_1 + w_2 \neq 0 \tag{13}$$

i

$$w_1 \cdot \overline{w}_2 \neq \pm i. \tag{14}$$

Połóżmy

$$D_\varepsilon^{(1)} = \{w : -w \in D_\varepsilon\} \quad \text{i} \quad D_{\varepsilon\,(1)}^{(2)} = \left\{w : \frac{1}{\overline{w}} \in D_\varepsilon\right\}.$$

Ze względu na własności obszaru D_ε: $D_\varepsilon^{(1)} \cap D_\varepsilon = \emptyset$ i $D_\varepsilon^{(2)} \cap D_\varepsilon = \emptyset$. Przypuśćmy przeciwnie, że $D_\varepsilon \cap D_\varepsilon^{(1)} \neq \emptyset$. Niech $w_1^* \in D_\varepsilon \cap D_\varepsilon^{(1)}$. Można przyjąć, że w^* leży na tyle blisko brzegów obszarów D_ε i $D_\varepsilon^{(1)}$, że $w^* \in F(P,\varepsilon)$ i $w \in -F(P,\varepsilon)$, gdzie $-F(P,\varepsilon)$ oznacza obraz przy pomocy odwzorowania $w \to -w$ w obszarze $F(P,\varepsilon)$. Ale z relacji $w^* \in -F(P,\varepsilon)$ wynika, że $-w^* \in F(P,\varepsilon)$, co jest niemożliwe ze względu na własności obszaru $F(P,\varepsilon)$. Stąd $D_\varepsilon \cap D_\varepsilon^{(1)} = \emptyset$ i własność (13) została udowodniona.

Dowód własności (14) przebiega analogicznie.

Wystarczy obecnie znaleźć funkcję $F_\varepsilon(z)$ odwzorowującą koło U na obszar D_ε - będzie to poszukiwana funkcja klasy K_G dowolnie bliska funkcji F.

Zauważmy najpierw, że

$$F(z,\varepsilon) = F(z) + \varepsilon F(z)\cdot\Phi(F(z)) + o(\varepsilon),$$

gdzie $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U. Na mocy twierdzenia Gołuzina [2], str. 99, funkcja $F_\varepsilon(z)$ odwzorowująca koło U na obszar D_ε, $F_\varepsilon(0) = 0$, jest postaci:

$$F_\varepsilon^*(z) = F(z) + \varepsilon F(z)\cdot\Phi(F(z)) - \varepsilon zF'(z)S(z) + \varepsilon zF'(z)\overline{S\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + o(\varepsilon), \tag{15}$$

gdzie S(z) oznacza część główną rozwinięcia w szereg Laurenta o środku w 0 funkcji $\frac{F(z)\,\Phi(F(z))}{zF'(z)}$ w pierścieniu P.

Poszukajmy teraz funkcji $\Phi(w)$ spełniającej warunki (3) - (5) i napiszmy wariację (15), generowaną przez tę funkcję.

Niech $z_0 \in U$, a $w_0 = F(z_0)$. Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Połóżmy

$$\Phi(w) = \frac{e^{i\alpha}}{w - w_0} - \frac{e^{i\alpha}}{w + w_0} - \frac{e^{-i\alpha}iw}{1 - w_0 iw} + \frac{e^{-i\alpha}iw}{1 + w_0 iw} \tag{16}$$

Łatwo widać, że w_0, $-w_0$, $\frac{\pm i}{w_0} \notin \partial D$, ponieważ $w_0 \in D$ i ze względu na własności funkcji F(z). Można zatem obszar Δ wybrać w ten sposób, by spełniał warunki (a) i (b) i by funkcja $\Phi(w)$ była holomorficzna w $\bar\Delta$.

Dla otrzymania wariacji (15) dla funkcji F(z), generowanej przez funkcję (16), wystarczy znaleźć funkcję S(z), tzn. część główną rozwinięcia w szereg Laurenta o środku 0 funkcji $\frac{F(z)}{zF'(z)}\Phi(F(z))$ w pierścieniu $P = \{z : r < |z| < 1\}$, gdy r jest na tyle bliskie 1, by $F(P) \subset \Delta$ oraz by $r > |z_0|$. Funkcja $\frac{F(z)\,\Phi(F(z))}{zF'(z)}$ może mieć w kole U bieguny jedynie w punktach z_0 i 0, przy czym te bieguny są jednokrotne.

Napiszmy dla funkcji $\frac{F(z)\,\Phi(F(z))}{F'(z)}$ rozwinięcie Laurenta o środku w z_0, w pierścieniu P. Będziemy mieli

$$\frac{F(z)\,\Phi(F(z))}{F'(z)} = \frac{F(z_0)}{F'(z_0)}\operatorname{res}_{z_0}\Phi(F(z))\,\frac{1}{z-z_0} + O(1)$$

Kładąc

$$\beta = \frac{F(z_0)}{F'(z_0)}\operatorname{res}_{z_0}\Phi(F(z)),$$

mamy

$$\frac{F(z)\,\Phi(F(z))}{F'(z)} = \frac{\beta}{z - z_o} + O(1).$$

W dalszym ciągu

$$\frac{F(z)\,\Phi F(z))}{zF'(z)} = \frac{1}{z}\,\frac{\beta}{z - z_o} + \frac{1}{z}\,O(1) = \frac{-\beta}{z_o z} + \frac{\beta}{z_o(z-z_o)} +$$

$$+ \left(\frac{F(z)\,\Phi F(z))}{F'(z)} - \frac{\beta}{z-z_o}\right)\frac{1}{z} = \frac{\beta}{z_o(z-z_o)} + \frac{F(0)\,\Phi F(0))}{F'(0)}\,\frac{1}{z} +$$

(część regularna w 0)

Poszukiwanymi funkcjami $S(z)$ i $\overline{S(\frac{1}{\bar z})}$ są zatem funkcje:

$$S(z) = \frac{F(z_o)}{z_o F'(z_o)}\,\operatorname{res}_{z_o}\Phi(F(z_o))\,\frac{1}{z-z_o} + \frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)}\,\frac{1}{z},$$

$$\overline{S(\tfrac{1}{\bar z})} = \left(\overline{\frac{F(z_o)}{z_o F'(z_o)}}\right)\operatorname{res}_{z_o}\overline{\Phi(F(z_o))}\,\frac{z}{1-\bar z_o z} + \overline{\frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)}}\,z,$$

a poszukiwana wariacja ma postać:

$$F^*(z) = F(z) + \varepsilon F(z)\,\Phi(F(z)) - \varepsilon\left(\frac{F(z_o)}{z_o F'(z_o)}\right)\operatorname{res}_{z_o}\Phi(F(z))\,\frac{zF'(z)}{z-z_o} -$$

$$-\varepsilon\,\frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)}\,F'(z) + \varepsilon\left(\overline{\frac{F(z_o)}{z_o F'(z_o)}}\right)\operatorname{res}_{z_o}\overline{\Phi(F(z))}\,\frac{z^2F'(z)}{1-\bar z_o z} +$$

$$+\varepsilon\,\overline{\frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)}}\,z^2F'(z) + o(\varepsilon). \tag{17}$$

Przypuśćmy z kolei, że w_o, $-w_o$, $\frac{\pm 1}{\bar w_o}$ są punktami zewnętrznymi obszaru D. Wówczas obszar Δ można znowu obrać w ten sposób, by funkcja $\Phi(w)$ spełniała w nim warunki (3) - (5) i by była halomorficzna w $\bar\Delta$. W tym wypadku funkcja $\Phi(F(z))$ jest funkcją holomorficzną w kole jednostkowym i funkcja $w^*(F(z)) = F(z)\,e^{\varepsilon\Phi(z)}$ jest już poszukiwaną wariacją funkcji $F(z)$; można zatem przyjąć, że

$$F^*(z) = F(z) + \varepsilon F(z)\,\Phi(F(z)) + o(\varepsilon). \tag{18}$$

Powyższe wyniki ujmiemy w 2 następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 2

Niech $F(z) \in K_G$, α - dowolna liczba rzeczywista, $z_0 \in U$ - dowolne. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $F^*(z) \in K_G$ taka, że

$$F^*(z) = F(z) + \varepsilon F(z)\,\phi(F(z)) - \varepsilon\left(\frac{F(z_0)}{z_0F'(z_0)}\right) \operatorname{res}_{z_0} \phi(F(z)) \frac{zF'(z)}{z - z_0} -$$

$$-\varepsilon \frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)} F'(z) + \varepsilon \overline{\left(\frac{F(z_0)}{z_0F'(z_0)}\right)} \operatorname{res}_{z_0} \overline{\phi(F(z))} \frac{z^2F'(z)}{1-\bar{z}_0 z} +$$

$$+\varepsilon \overline{\frac{F(0)\,\Phi(F(0))}{F'(0)}}\, z^2 \cdot F'(z) + o(\varepsilon),$$

gdzie $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Twierdzenie 3

Niech $F(z) \in K_G$, α - dowolna liczba rzeczywista i w_0 taki, że w_0, $-w_0$, $\pm\frac{i}{w_0}$ są punktami zewnętrznymi obszaru D. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $F^*(z) \in K_G$ taka, że

$$F^*(z) = F(z) + \varepsilon F(z)\,\phi(F(z)) + o(\varepsilon),$$

gdzie $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Na zakończenie podamy 3 elementarne wariacje, które są oparte na odwzorowaniach koła U w U. Zauważmy, że jeżeli G(z) jest funkcją jednolistną w U, $G(0) = 0$, $G(U) \subset U$, wtedy z tego, że $F(z) \in K_G$ wynika, że $F(G(z)) \in K_G$.

Kładąc, po pierwsze, $G(z) = e^{\pm i\varepsilon} z$, $\varepsilon > 0$, dostajemy wzór wariacyjny:

$$F^*(z) = F(e^{\pm i\varepsilon} z) = F(z) \pm i\varepsilon zF'(z) + o(\varepsilon), \tag{19}$$

Kładąc następnie $G(z) = \dfrac{z + \varepsilon e^{i\alpha}}{1 + \varepsilon e^{-i\alpha} z}$, $0 < \varepsilon < 1$ i α - dowolna liczba rzeczywista, otrzymujemy wzór wariacyjny:

$$F^*(z) = F\left(\frac{z + \varepsilon e^{i\alpha}}{1 + \varepsilon e^{-i\alpha} z}\right) = F(z) + \varepsilon\left[e^{i\alpha}F'(z) - e^{-i\alpha}z^2F'(z)\right] + o(\varepsilon) \tag{20}$$

Kładąc wreszcie $G(z) = k_\alpha^{-1}((1-\varepsilon)k_\alpha(z))$, gdzie $k_\alpha(z) = \dfrac{z}{(1 + e^{-i\alpha}z)^2}$ α - dowolna liczba rzeczywista, $\varepsilon > 0$, otrzymujemy trzeci wzór wariacyjny:

$$F^*(z) = F(k_\alpha^{-1}((1-\varepsilon)k_\alpha(z))) = F(z) - \varepsilon zF'(z) \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} + o(\varepsilon), \tag{21}$$

Te trzy wariacje będą wykorzystane w dalszym ciągu pracy.

3. Niech $\Phi(F)$ będzie funkcjonałem rzeczywistym, zdefiniowanym i ciągłym na K_G. Niech $H(U)$ będzie przestrzenią funkcji holomorficznych w U ze zbieżnością jednostajną w zbiorach zwartych. Załóżmy, że $\Phi(F)$ ma pochodną zespoloną w sensie Gâteux w punkcie F, tzn. że istnieje funkcjonał $L_F \in H'(U)$ taki, że

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon \,\mathrm{re}\, L_F(h) + o(\varepsilon), \tag{22}$$

gdzie $\varepsilon > 0$, F^* jest dowolną funkcją z K_G taką, że

$$F^*(z) = F(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon), \tag{25}$$

$h(z) \in H(U)$, i $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w U.

Połóżmy, korzystając z oznaczeń wprowadzonych w [1], str. 12

$$D(w) = L_F\left(\frac{wF}{F-w}\right), \quad E(\xi) = L_F\left(\frac{\xi zF'(z)}{z-\xi}\right),$$

$$A(w) = D(w) + D(-w) + \overline{D\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)} + \overline{D\left(-\frac{1}{\overline{w}}\right)} + \overline{2L_F(F)}, \tag{24}$$

$$B(\xi) = E(\xi) + \overline{L_F(zF'(z))} + \overline{E\left(\frac{1}{\overline{\xi}}\right)}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{-\overline{w}F^2}{1-\overline{w}F} = F + \frac{F}{\overline{w}\left(F-\frac{1}{\overline{w}}\right)},$$

$$\frac{-\overline{\xi}z^2F'(z)}{1-\overline{\xi}z} = zF'(z) + \frac{zF'(z)}{\overline{\xi}\left(z-\frac{1}{\overline{\xi}}\right)}. \tag{25}$$

Korzystając z oznaczeń (24), ze związków (25), ze wzorów (22), (23) i wzorów wariacyjnych (17), (18), (19), (20) i (21), otrzymujemy następujące wzory wariacyjne dla funkcjonału Φ w punkcie F w rodzinie K_G. Są one postaci:

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon\,\mathrm{re}\left\{e^{i\alpha}\left[A[F(z_0)] - \left(\frac{F(z_0)}{z_0F'(z_0)}\right)^2 B(z_0)\right]\right\} + o(\varepsilon) \tag{26}$$

dla każdego $z_0 \in U$, α - rzeczywistego, dowolnego i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego;

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon\,\mathrm{re}\left\{e^{i\alpha}A(w_0)\right\} + o(\varepsilon) \tag{27}$$

dla każdego w_o takiego, że w_o, $-w_o$, $\frac{\pm 1}{w_o}$ nie należą do D i dla α - dowolnego, rzeczywistego i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego;

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon \operatorname{re} L_F(\pm izF'(z)) + o(\varepsilon) \tag{28}$$

dla ε dodatniego dostatecznie małego;

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) + \varepsilon \operatorname{re} L_F\left[e^{i\alpha}F'(z) - e^{-i\alpha}z^2F'(z)\right] + o(\varepsilon) \tag{29}$$

dla α - rzeczywistego, dowolnego i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego;

$$\Phi(F^*) = \Phi(F) - \varepsilon \operatorname{re} L_F\left(zF'(z)\,\frac{e^{i\alpha}+z}{e^{-i\alpha}-z}\right) + o(\varepsilon) \tag{30}$$

dla α - dowolnego, rzeczywistego i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego.

Udowodnimy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4

Niech $\Phi(F)$ będzie funkcjonałem rzeczywistym, zdefiniowanym i ciągłym na K_G, mającym w punkcie $F \in K_G$ pochodną zespoloną L_F w sensie Gâteaux. Niech F realizuje maksimum lokalne dla tego funkcjonału w rodzinie K_G. Wtedy F spełnia równanie:

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 A\left[F(z)\right] = B(z), \quad z \in U, \tag{31}$$

gdzie $A(w)$ i $B(z)$ są zdefiniowane wzorami (24) i ponadto

$$B(z) \leqslant 0 \quad \text{dla } |z| = 1. \tag{32}$$

Dowód

Z nierówności $\Phi(F^*) \leqslant \Phi(F)$, ze wzoru wariacyjnego (26) i z faktu, że ε i α są dowolne, wynika, że funkcja $F(z)$ spełnia równanie (31). Własność (32) wynika zę wzorów wariacyjnych (29), (30), z nierówności wzmiankowanej wyżej i z faktu, że ε w (30) jest dowolną liczbą dodatnią.

Twierdzenie 5

Niech Φ i F będą takie same jak w twierdzeniu poprzednim, i przypuśćmy, że $A(w)$ jest funkcją meromorficzną w C i $\not\equiv 0$.

Jeżeli w_o, $-w_o$, $\frac{\pm 1}{w_o}$ nie należą do D, wtedy co najmniej jeden z tych punktów znajduje się na brzegu obszaru D.

Dowód

Załóżmy, że w_0, $-w_0$, $\frac{\pm 1}{w_0} \in C \setminus \overline{F(U)}$. Wtedy na podstawie wzoru wariacyjnego (27) i z faktu, że α jest dowolne wynika, że istnieje otoczenie U_{w_0} punktu w_0 takie, że $A(w) = 0$ dla każdego $w \in U_{w_0}$; więc $A(w) \equiv 0$ w C, co jest niemożliwe.

LITERATURA

[1] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational methods for Bieberbach-Eilenberg functions and for pairs. Ann.Acad.Sci.Fennicae,Ser. A.I. Mathematica, 3, 1977, 3-42.

[2] Голузин Г.М.: Геометрическая теория функций комплексного переменного, Наука, Москва 1966.

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРОВО КЛАССА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе найдено вариационные формулы для некоторого подкласса функций класса Гельфера, это значит функций однолистных в единичном круге, которые не принимают одновременно величин w, $-w$ и $\pm\frac{1}{w}$.

VARIATIONAL METHODS FOR SOME CLASS OF UNIVALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

This paper deals with the variational methods for the subclass of class of the Gelfer functions, which are univalent in $U = \{z : |z| < 1\}$ and do not receive simultaneously values w, $-w$, $\frac{\pm 1}{w}$.