ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Jolanta ŚMIGIELSKA

# NIERÓWNOŚCI GRUNSKY'EGO - NEHARIEGO DLA FUNKCJI JEDNOLISTNYCH, SYMETRYCZNYCH I OGRANICZONYCH

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest udowodnienie dokładności nierówności Grunsky'ego - Nehariego dla rzeczywistych parametrów w klasie funkcji jednolistnych, symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym.

1. Rola nierówności Grunsky'ego w badaniu problemu współczynników funkcji jednolistnych znana jest od dawna. W rodzinie $S_1$ funkcji jednolistnych i ograniczonych, co do modułu przez 1 w kole jednostkowym, odpowiednikiem nierówności Grunsky'ego są nierówności Grunsky'ego - Nehariego. Myślą przewodnią w otrzymywaniu wspomnianych tu nierówności jest szukanie takich funkcjonałów, określonych na odpowiednich rodzinach funkcji jednolistnych, zależnych od dużej liczby parametrów, których różniczka Frécheta jest kwadratem zupełnym. W tym wypadku równanie różniczkowe, spełnione przez funkcje ekstremalizujące wartości funkcjonału, może być sprowadzone do prostego równania funkcyjnego, z którego już bez rozwiązywania można otrzymać nierówność Grunsky'ego - Nehariego.

Nierówności Grunsky'ego - Nehariego są spełnione oczywiście przez wszystkie funkcje klasy $S_1$, których współczynniki rozwinięcia Maclaurina są rzeczywiste, ponieważ jest to podklasa - oznaczmy ją przez $S_{1R}$ - klasy $S_1$, nie wiadomo natomiast czy są one w tej podklasie dokładne. Otóż głównym wynikiem pracy (twierdzenie 1) jest dowód dokładności tych nierówności w $S_{1R}$ w przypadku, gdy wszystkie parametry są rzeczywiste. Narzędziem jest tu równanie różniczkowo - funkcyjne dla funkcji ekstremalnych w pewnych zwartych podklasach klasy $S_{1R}$, otrzymane przez Z. Charzyńskiego i H. Śmiałkównę w [1]. Dowód dokładności nierówności Grunsky'ego - Nehariego dla klasy $S_1$ w przypadku dowolnych parametrów podała J. Śladkowska w [2].

W dalszym ciągu funkcje rodziny $S_{1R}$ będziemy nazywali funkcjami jednolistnymi, ograniczonymi i symetrycznymi.

2. Niech $S_{1R}^{(T)}$, $0<T<1$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym $U = \{z;\ |z|<1\}$ postaci:

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

$b_n$ rzeczywiste dla $n=1,2,\dots$, spełniających warunki

(i) $$|f(z)| < 1 \quad \text{dla } z \in U,$$

(ii) $$b_1 \geq T.$$

Rodzina $S_{1R}^{(T)}$ zawarta w rodzinie $S_{1R}$ funkcji jednolistnych postaci (1), spełniających warunek (i), jest zbiorem zwartym w sensie zbieżności niemal jednostajnej. Jeśli $\Phi(f)$ jest funkcjonałem rzeczywistym określonym na $S_{1R}^{(T)}$, ciągłym w $S_{1R}^{(T)}$, to istnieje funkcja $f^* \in S_{1R}^{(T)}$ taka, że

($\alpha$) $$\Phi(f^*) = \sup_{f \in S_{1R}^{(T)}} \Phi(f).$$

Niech $f \in R_{1R}$. Rozważamy funkcje

$$M(u, v) = \log \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, \quad (u, v) \in U \times U, \tag{2}$$

$$N(u, \bar{v}) = -\log\left(1-\overline{f(v)}f(u)\right), \quad (u,v) \in U \times U. \tag{3}$$

Wybieramy taką gałąź logarytmu, że gdy u, v zmierzają do zera, to $N(u,\bar{v})$ zmierza do zera, natomiast $M(u,v)$ zmierza do $-\log b_1$. Funkcje $M(u, v)$ i $N(u, \bar{v})$ są funkcjami holomorficznymi zmiennych u, v i u, $\bar{v}$ w bidysku $U \times U$, mającymi rozwinięcia

$$M(u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} u^m v^n, \tag{4}$$

$$N(u, \bar{v}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} u_m \bar{v}^n. \tag{5}$$

Rozważamy funkcjonał

$$\Phi(f) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn} + b_{mn})\, x_m x_n\right\}, \tag{6}$$

gdzie $x_1,\dots,x_N$ są dowolnymi, ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 > 0$. Ten funkcjonał jest ciągły w $S_{1R}$ czyli jest ciągły w $S_{1R}^{(T)}$

dla $0<T<1$. Funkcjonał $\Phi(f)$ można zapisać w postaci

$$\Phi(f) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} M(u,v)\mu(u)\mu(v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v} + \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} N(u,v)\mu(u)\overline{\mu(v)}\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{v}\right], \tag{7}$$

gdzie $\mu(u) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{u^k}$, $\Gamma_1 : |u| = r_1$, $\Gamma_2 : |u| = r_2$, $0<r_1<r_2<1$.

Funkcjonał (6) ma w każdym punkcie $f \in S_{1R}^{(T)}$ różniczkę postaci

$$\Lambda[f;\ h] = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{h(u)-h(v)}{f(u)-f(v)}\,\mu(u)\mu(v)\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{v} + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{f(u)\overline{h(v)} + \overline{f(v)}h(u)}{1-\overline{f(v)}\,f(u)}\,\mu(u)\overline{\mu(v)}\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{v}\right], \tag{8}$$

gdzie $h = h(z) \in H$, $H$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji holomorficznych w kole $U$. Z (8) wynika, że $\Lambda[f;\ h]$ nie znika tożsamościowo w żadnym punkcie rodziny $S_{1R}^{(T)}$, np nie zeruje się dla $h=f$. $\Lambda[f;\ h]$ przedłuża się z $S_{1R}^{(T)}$ na rodzinę funkcji symetrycznych i meromorficznych w $U$, mających bieguny położone co najwyżej w punktach pierścienia $E^* = \{z;\ r<|z|<1\}$, gdzie $r = \max(r_1, r_2)$. Brzeg zbioru $E^*$ zawiera okrąg $\{z;\ |z| = 1\}$ i żaden punkt tego okręgu nie jest punktem skupienia punktów istotnych [1] dopełnienia zbioru $E^*$.

Dla funkcjonału (6) możemy więc stosować twierdzenie fundamentalne (wniosek II) [1] podane przez Z. Charzyńskiego i H. Smiałkównę. Z tego twierdzenia wynika, że jeśli

$$f = f(z) \tag{8}$$

jest funkcją rodziny $S_{1R}^{(T)}$, dla której funkcjonał (6) osiąga wartość największą, wtedy:

I. Istnieje otwarty łuk $C$ na okręgu $|z| = 1$, na którym funkcja $f$ jest jednolistna i odwzorowuje ten łuk na pewien łuk $D$ na okręgu $|w| = 1$.

II. Dla każdego $z \in C$ zachodzi

$$\left[z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f(z)] = \mathfrak{N}(z), \tag{9}$$

gdzie

$$\mathfrak{M}(w) = \Lambda\left[f;\ f(\zeta)\left(\frac{1+wf(\zeta)}{1-wf(\zeta)} + \frac{1+\overline{wf(\zeta)}}{1-\overline{wf(\zeta)}}\right)\right] - p, \tag{10}$$

$$\mathfrak{R}(z) = \Lambda\left[f;\ \zeta f'(\zeta)\left(\frac{1+z\zeta}{1-z\zeta} + \frac{1+z\zeta}{1-z\zeta}\right)\right] - \mathcal{P}, \tag{11}$$

$$\mathcal{P} = \operatorname*{Min}_{0<y<2\pi} \Lambda\left[f;\ f(\zeta)\left(\frac{1+e^{iy}f(\zeta)}{1-e^{iy}f(\zeta)} + \frac{1+e^{-iy}f(\zeta)}{1-e^{-iy}f(\zeta)}\right)\right]. \tag{12}$$

$\zeta$ oznacza zmienną w (10) i (11), $w$ oraz $z$ pełnią rolę parametrów. $\Lambda[f;\ h]$ oznacza różniczkę (8) funkcjonału $\Phi$ w punkcie (8').

III. Funkcje (10) i (11) są rzeczywiste i nieujemne na okręgach $|w| = 1$ i $|z| = 1$.

IV. Pierwszy współczynnik $b_1$ funkcji ekstremalnej jest równy T.

V. Równanie (9) zachodzi dla każdego $z \in E^*$.

Biorąc pod uwagę (8), (10), (11) otrzymamy, że funkcje $\mathfrak{M}(w)$ i $\mathfrak{R}(z)$ dla $|w| = 1$ i $|z| = 1$ przyjmą postać

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{2}{4\pi^2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\bar{w}f(u)}{(1-\bar{w}f(u))(1-\bar{w}f(v))} + \frac{\bar{w}f(v)-w\bar{w}f(u)\bar{f}(v)}{(1-\bar{w}f(u))(1-\bar{w}f(v))} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-\bar{w}f(u))(1-\bar{w}f(v))}\right]\mu(u)\mu(v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v} +$$

$$\left. + \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\left(\frac{w\bar{w}f(u)\overline{f(v)}}{(1-\bar{w}f(u))(1-\bar{w}f(v))} + \frac{w\bar{w}f(u)\overline{f(v)}}{(1-\bar{w}f(u))(1-\bar{w}f(v))}\right)\mu(u)\overline{\mu(v)}\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{\overline{v}}\right\}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{R}(z) = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\left[\frac{uf'(u)}{f(u)-f(v)}\left(\frac{1+zu}{1-zu} + \frac{1+\bar{z}u}{1-\bar{z}u}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{vf'(v)}{f(u)-f(v)}\left(\frac{1+zv}{1-zv} + \frac{1+\bar{z}v}{1-\bar{z}v}\right)\right]\mu(u)\,\mu(v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v} +$$

$$+ \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{\overline{vf'(v)}f(u)}{1-\overline{f(v)}f(u)}\left(\frac{1+\bar{z}\bar{v}}{1-\bar{z}\bar{v}} + \frac{1+z\bar{v}}{1-z\bar{v}}\right)\mu(u)\overline{\mu(v)}\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{\overline{v}} +$$

$$+ \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{uf'(u)\overline{f(v)}}{1-\overline{f(v)}f(u)}\left(\frac{1+zu}{1-zu} + \frac{1+\bar{z}u}{1-\bar{z}u}\right)\mu(u)\overline{\mu(v)}\,\frac{du}{u}\,\frac{\overline{dv}}{\overline{v}}. \tag{14}$$

Niech $F_m(t)$ będą wielomianami Fabera stopnia $m$ dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$, tzn. $F_m(t)$ jest wielomianem stopnia $m$ mającym w pewnym otoczeniu punktu $z = 0$ rozwinięcie

$$F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z^n. \tag{15}$$

Wiemy, że w pewnym dostatecznie małym otoczeniu punktu $\zeta = 0$

$$\log(1-tf(\zeta)) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(F_m(t) + ma_{mo})\zeta^m, \tag{16}$$

skąd

$$F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = z^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} m\, a_{mn} z^n, \quad m>1, \tag{17}$$

$$F_m(\overline{f(z)}) = \sum_{n=1}^{\infty} m\, b_{mn} \bar{z}^n - m\, a_{mo}, \quad m>1. \tag{18}$$

Z (15) i (17) wynika, że $c_{mn} = m\, a_{mn}$ dla $m,n>1$.

Różniczkując (16) względem $t$ otrzymamy

$$\frac{1}{1-tf(\zeta)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t\, F'_m(t)\zeta^m. \tag{19}$$

Kładąc w (19) odpowiednio $t=\bar{w}$, $\zeta=u$, $t=w$, $\zeta=v$, otrzymamy

$$\frac{1}{1-\bar{w}f(u)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \bar{w}F'_m(\bar{w})u^m, \tag{20}$$

$$\frac{1}{1-\bar{w}f(v)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \bar{w}\, F'_m(\bar{w})\, v^m, \tag{20}$$

$$\frac{\bar{w}f(v)}{1-\bar{w}f(v)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \bar{w}\, F'_m(\bar{w})\, v^m, \tag{21}$$

$$\frac{wf(v)}{1-wf(v)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} w\, F'_m(w)\, v^m. \tag{21}$$

Różniczkując względem $u$ i $v$ (4) i (5) oraz biorąc pod uwagę, że $|u| = r_1 < r_2 = |v|$, otrzymamy

$$\frac{u\, f'(u)}{f(u)-f(v)} = -\sum_{j=1}^{\infty} u^j v^{-j} - \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} v^n\right)u^m, \tag{22}$$

$$\frac{v\,f'(v)}{f(v)-f(u)} = \sum_{j=0}^{\infty} u^j v^{-j} - \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} u^m\Big) v^n, \tag{23}$$

$$\frac{u\,f'(u)\overline{f(v)}}{1-\overline{f(v)}f(u)} = \sum_{m=1}^{\infty} m\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \bar{v}^n\Big) u^m, \tag{24}$$

$$\frac{\bar{v}\,\overline{f'(v)}f(u)}{1-\overline{f(v)}f(u)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} u^m\Big) \bar{v}^n. \tag{25}$$

Wstawiając (20) - (21') do (13) oraz (22) - (25) do (14), otrzymamy

$$\mathfrak{M}(w) = 2\Big[\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\,(iF'_m(w) - iF'_m(\bar{w}))\Big]^2 - \mathfrak{p} \tag{26}$$

dla $|w| = 1$ i

$$\mathfrak{N}(z) = 4\Big[-\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{N} x_k z^k\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{z^k}\Big)^2 +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} m(a_{mn} + b_{mn})\, x_m x_n +$$

$$+ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{N-1} \Big(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-k} m\,(a_{mn} + b_{mn})\, x_{m+k}\, x_n\Big)(z^k + z^{-k})\Big] - \mathfrak{p}$$

dla $|z| = 1$, (27)

$$\mathfrak{p} = \operatorname*{Min}_{0<y<2\pi} 2\Big[\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\,(ie^{iy} F'_m(e^{iy}) - ie^{-iy} F'_m(e^{-iy}))\Big]^2 =$$

$$= \operatorname*{Min}_{0<y<2\pi} 8\,\Big(\operatorname{Im} \sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\, e^{iy} F'_m(e^{iy})\Big)^2 \geq 0. \tag{28}$$

Rozważamy funkcję $\varphi(y) = \sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\,(F_m(e^{iy}) + F_m(e^{-iy}))$. $\varphi(y)$ jest funkcją rzeczywistą, ciągłą i okresową o okresie $2\pi$ czyli jej pochodna

$$\varphi'(y) = \sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\,(ie^{iy} F'_m(e^{iy}) - ie^{-iy} F'_m(e^{-iy}))$$

musi być równa zero dla pewnego $y_0 \in [0, 2\pi)$. Stąd wynika, że

$$\mathfrak{p} = 0 \tag{29}$$

Ponadto z (27) wynika, że funkcja $\mathfrak{R}(z)$ jest funkcją rzeczywistą, mającą bieguny stopnia co najwyżej 2N jedynie w punktach $z = 0$ i $z = \infty$. Na podstawie III, $\mathfrak{R}(z)$ jest nieujemna na zbiorze $\{z\ ;\ |z| = 1\}$.

Korzystając z II, (26) i (29), możemy stwierdzić, że funkcja (8'), dla której funkcjonał (6) osiąga maksymalną wartość w $S_{1R}^{(T)}$, spełnia w zbiorze $\{z;\ r < |z| < 1\} \cup C$, $(r = \max(r_1, r_2))$, następującą równość

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 \left[\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m} \left(if(z)F'_m(f(z)) - i\frac{1}{f(z)} F'_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right)\right]^2 = \frac{1}{z^2}\mathfrak{R}(z), \tag{30}$$

gdzie $\mathfrak{R}(z)$ jest funkcją określoną w (27).

Ponieważ $0<r_1<r_2<1$ są dowolnymi liczbami, wobec tego $r = \max(r_1, r_2)$ jest też dowolną liczbą z przedziału (0,1), czyli funkcja (8') spełnia równanie (30) w pierścieniu $\{z;\ 0 < |z| < 1\}$.

Na podstawie (30) widać, że funkcja $\mathfrak{R}(z)$ ma w kole U jedynie pierwiastki stopnia parzystego, z jej symetrii względem okręgu $\{z;\ |z| = 1\}$ wynika, że tak samo jest z pierwiastkami leżącymi na zewnątrz koła U. Pierwiastki położone na okręgu $\{z;\ |z| = 1\}$ są również parzystego stopnia, ponieważ $\mathfrak{R}(z) \geq 0$ dla $|z| = 1$.

Pierwiastkując obustronnie równość (30), otrzymamy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m} \left[if(z)\ F'_m(f(z)) - i\frac{1}{f(z)} F'_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right] = \mathfrak{R}_1(z)\frac{1}{z}, \tag{31}$$

gdzie $\mathfrak{R}_1(z) = \sqrt{\mathfrak{R}(z)}$ jest funkcją wymierną, mającą bieguny rzędu co najwyżej N jedynie w punktach $z = 0$ i $z = \infty$, oraz $\operatorname{Im}\mathfrak{R}_1(z) = 0$ dla $|z|=1$, czyli $\mathfrak{R}_1(z)$ ma postać

$$\mathfrak{R}_1(z) = \frac{A_N}{z^N} + \ldots + A_0 + \ldots + \bar{A}_N z^N,$$

gdzie $A_0$ jest liczbą rzeczywistą. Rozważając współczynniki przy $z^{-1}$ w równaniu (31) oraz korzystając z (17) i (18) stwierdzamy, że $A_0 = 0$.

Całkując następnie równość (31), otrzymamy

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m}\left[F_m(f(z)) + F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right] = \frac{iA_N}{N} z^{-N} + \ldots + \frac{i\bar{A}_N}{N} z^N + C. \tag{32}$$

Z (17), (18) i (32) wynika, że prawa strona w równaniu (32) ma następującą postać

$$\sum_{m=1}^{N} \left(\frac{x_m}{m} z^{-m} + \frac{x_m}{m} z^m\right) + C. \tag{33}$$

Z warunku I wynika, że $\operatorname{Im} C = 0$. Wstawiając (17) i (18) do (32) otrzymamy, że $C = -\sum_{m=1}^{N} x_m a_{mo}$. Natomiast porównując współczynniki przy $z^n$ oraz korzystając z (33) otrzymamy, że

$$\sum_{m=1}^{N} (a_{mn} + b_{mn}) x_m = \begin{cases} \frac{x_n}{n}, & \text{dla } 1 < n < N, \\ 0, & \text{dla } n > N. \end{cases} \tag{34}$$

Podsumowując możemy stwierdzić, że

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m} \left[F_m(f(z)) + F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right] = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{x_m}{m} z^{-m} + \frac{x_m}{m} z^m\right) + C \quad \text{dla } 0<|z|<1. \tag{35}$$

Mnożąc (34) przez $x_n$ oraz dodając stronami dla $n=1,2,\ldots,N$, otrzymamy

$$\Phi(f) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn} + b_{mn}) x_m x_n\right\} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2}{n}.$$

Można sformułować następujące dowiedzione twierdzenie.

Twierdzenie 1

W rodzinie $S_{1R}^{(T)}$ istnieją ekstremalne funkcje $f = f(z)$, dla których funkcjonał (6) osiąga wartość największą.

1. Każda ekstremalna funkcja spełnia równanie

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m} \left(F_m(f(z)) + F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)\right) = \sum_{m=1}^{N} (z^{-m} + z^m) \frac{x_m}{m} - \sum_{m=1}^{N} x_m a_{mo},$$

gdzie $x_i$ rzeczywiste dla $i=1,2,\ldots,N$, $F_m(t)$ są wielomianami Fabera stopnia $m$ dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$, $\sum_{m=0}^{\infty} a_{mo} z^m = \log \frac{z}{f(z)}$ oraz $\operatorname{Im}\left(\sum_{m=1}^{N} a_{mo} x_m\right) = 0$.

2. Dla funkcji ekstremalnych $\Phi(f) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2}{n}$.

3. Współczynnik $b_1$ rozwinięcia tych funkcji jest równy $T$.

Możemy obecnie udowodnić nierówność Grunsky'ego - Nehariego dla klasy $S_{1R}^{(T)}$ przy każdym $T \in (0,1)$, a tym samym dla całej klasy $S_{1R}$.

Z twierdzenia 1 oraz z faktu, że $S_{1R} = \bigcup_{0<T<1} S_{1R}^{(T)}$ wynika, że każda funkcja $f \in S_{1R}^{(T)}$, dla której funkcjonał (6) osiąga maksymalną wartość w $S_{1R}^{(T)}$, jest funkcją dla której ten funkcjonał osiąga maksymalną wartość w $S_{1R}$.

Otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w postaci następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2**

Niech $x_1, \ldots, x_N$ będą dowolnymi, rzeczywistymi liczbami, f dowolną funkcją klasy $S_{1R}$. Niech $(a_{mn})$ i $(b_{mn})$ będą macierzami zdefiniowanymi w (4) i (5). Wtedy

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn} + b_{mn})\, x_m\, x_n\right\} < \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^2}{n}. \tag{36}$$

Nierówność (36) jest dokładna, oraz dla każdego $T \in (0,1)$ w rodzinie $S_{1R}$ istnieje funkcja f, której pierwszy współczynnik $b_1$ jest równy T i dla tej funkcji w (36) zachodzi równość. Funkcja ta spełnia równanie (35).

## LITERATURA


[1] Charzyński Z., Śmiałkówna H.: The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional, Biulletin de la Société de Sciences et Lettres de Łódź, VOL 12 (13), 1961.

[2] Śladkowska J.: Les polynômes de Faber dans les familles compactes de fonctions univalentes bornées, Ann. Soc. Math. Pol. ser. XX, 1977, p. 205-214.


## НЕРАВЕНСТВА ГРУНСКИ-НЕХАРИ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ, ОГРАНИЧЕННЫХ И СИМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ


Р е з ю м е

В настоящей работе показано что в неравенствах Грунски - Нехари при вещественных параметрах возможно равенство в классе однолистных, ограниченных и симетричечких функций в единичном круге.


## THE GRUNSKY - NEHARI INEQUALITY IN THE CLASS OF UNIVALENT, BOUNDED AND SYMMETRIC FUNCTIONS


S u m m a r y

In the above paper there has been proved that in the Grunsky - Nehari inequality the equality is always possible for real parameters in the class of univalent, bounded and symmetric functions in the unit disk.