ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Jolanta ŚMIGIELSKA

WZORY WARIACYJNE W KLASIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH, SYMETRYCZNYCH I OGRANICZONYCH

Streszczenie. W pracy podano wzory wariacyjne dla klasy funkcji jednolistnych, symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym, oparte na metodzie zawartej w pracy [1] J.A. Hummela i M.M. Schiffera. Jako przykład stosowania tych wzorów uzyskano oszacowanie Picka dla drugiego współczynnika w rozwinięciu Maclaurina tych funkcji.

WSTĘP

Metody wariacyjne są często używanymi narzędziami w badaniu funkcji jednolistnych. Dają one jednolitą metodę badania funkcji ekstremalnych dla funkcjonałów zdefiniowanych na odpowiednich klasach funkcji jednolistnych. Metoda wariacyjna dla funkcji Bieberbacha-Eilenberga znaleziona w [1] może być uogólniona na inne klasy funkcji jednolistnych.

Głównym celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów wariacyjnych w oparciu o metodę podaną w [1], dla pewnej podklasy klasy funkcji jednolistnych i ograniczonych, a mianowicie klasy funkcji jednolistnych, symetrycznych i ograniczonych w kole jednostkowym. Podklasę tę oznaczamy przez S_{1R}. Na podstawie otrzymanych wzorów wariacyjnych otrzymuje się (twierdzenie 4) równanie, które spełnia funkcja ekstremalna dla funkcjonału mającego pochodną w sensie Frecheta. Jako przykład zastosowania tego równania uzyskano oszacowanie Picka dla drugiego współczynnika w rozwinięciu Maclaurina tych funkcji.

Metody wariacyjne dla badania funkcji klasy S_{1R} stosował również V.V. Černikov [3] i Z.J. Jakubowski [4].

1. Niech $U = \{z;\ |z| < 1\}$. Przez S_{1R} oznaczamy klasę funkcji $f = f(z)$, jednolistnych w U, mających w U rozwinięcie postaci

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \tag{1}$$

b_n rzeczywiste dla $n=1,2,\dots$, $b_1 > 0$, oraz spełniających warunek

$$|f(z)| < 1 \quad \text{dla} \quad z \in U. \tag{2}$$

Jednospójny obszar D zawierający zero, symetryczny względem osi rzeczywistej (tzn. $w \in D \Longleftrightarrow \overline{w} \in D$), zawarty w U, będziemy nazywali obszarem symetrycznym i ograniczonym.

Jeśli $f \in S_{1R}$, to na podstawie (1) i (2), $f(U)$ jest obszarem symetrycznym i ograniczonym. Na odwrót, jeśli D jest obszarem symetrycznym i ograniczonym, to konforemne odwzorowanie $f(z)$ koła U na D, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, jest funkcją klasy S_{1R}.

Obecnie udowodnimy twierdzenie analogiczne do twierdzenia 2.1 w [1], dające wariację obszaru symetrycznego i ograniczonego na obszar tego samego typu.

Twierdzenie 1

Niech D będzie obszarem symetrycznym i ograniczonym, Δ natomiast obszarem, którego domknięcie nie zawiera 0 i ∞, $\partial D \subset \Delta$ i Δ jest symetryczny względem przekształceń $w \to \overline{w}$ i $w \to \frac{1}{\overline{w}}$ (tzn. $w \in \Delta \Longleftrightarrow \overline{w} \in \Delta$ i $w \in \Delta \Longleftrightarrow \frac{1}{\overline{w}} \in \Delta$). Niech $\phi(w)$ będzie funkcją analityczną w $\overline{\Delta}$, spełniającą warunki

$$\left.\begin{aligned} \phi(w) &= \overline{\phi(\overline{w})}, \\ \phi(w) &= -\overline{\phi\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)} \end{aligned}\right\} \text{ dla każdego } w \in \Delta . \tag{3}$$

Wtedy dla dowolnego, dostatecznie małego $\varepsilon > 0$, funkcja

$$w^*(w) = w\exp\left[\varepsilon\phi(w)\right] \tag{4}$$

jest jednolistna w Δ i odwzorowuje brzeg obszaru D na brzeg obszaru symetrycznego i ograniczonego.

Dowód

Wprowadzamy funkcję

$$\Psi(w_1, w_2) = \begin{cases} \dfrac{\phi(w_1) - \phi(w_2)}{w_1 - w_2}, & w_1 \neq w_2 \\ \phi'(w_1), & w_1 = w_2. \end{cases} \tag{5}$$

Funkcja Ψ jest analityczna i ograniczona w zbiorze zwartym $\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}$. Dowód jednolistności $w^*(w)$ dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ jest analogiczny do dowodu tego faktu w twierdzeniu 2.1 w [1]. Skoro $w^*(w)$ jest jednolistna w Δ, to odwzorowuje brzeg obszaru D na brzeg jednospójnego obszaru D^*. Należy wykazać, że D^* jest obszarem symetrycznym i ograniczonym. Symetryczność obszaru D^* wynika z faktu, że dla $w \in \Delta$ zachodzi

$$w^*(\overline{w}) = \overline{w}\exp\left[\varepsilon\phi(\overline{w})\right] = \overline{w\exp[\varepsilon\phi(w)]} = \overline{w^*(w)},$$

czyli $w^*(w)$ odwzorowuje ∂D na zbiór symetryczny względem osi rzeczywistej, a stąd D^* jest również symetryczny.

Udowodnimy obecnie, że dla dostatecznie małych ε $D^* \subset U$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istniałyby wówczas punkty w_1 i $w_2 \in D$, $w_1 \neq w_2$, tak bliskie brzegu D, że $w_1, w_2 \in \Delta \cap D$, dla których $w^*(w_1)\overline{w^*(w_2)} = 1$. Biorąc pod uwagę (4), otrzymamy

$$w_1 \overline{w}_2 \exp\left\{\varepsilon\left[\Phi(w_1) + \overline{\Phi(w_2)}\right]\right\} = 1. \tag{6}$$

Korzystając z (3) i (6) dostajemy, że

$$w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2} = w_1\left\{1 - \exp\left[\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\Psi\left(w_1, \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\right]\right\}.$$

Ponieważ dla każdego s $\left|1 - e^s\right| \leq |s|\ e^{|s|}$, wobec tego

$$\left|w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right| \leq \varepsilon\left|w_1\ \left(w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\Psi\left(w_1, \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\exp\left|\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\Psi\left(w_1, \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\right|\right|. \tag{7}$$

Po podzieleniu obu stron nierówności (7) przez $\left|w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right| \neq 0$ dla $w_1, w_2 \in D$, otrzymamy

$$1 \leq \varepsilon\left|\Psi\left(w_1, \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\ w_1\left|\exp\left|\varepsilon\left(w_1 - \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\Psi\left(w_1, \frac{1}{\overline{w}_2}\right)\right|\right.\right.. \tag{8}$$

Ponieważ funkcja $\Psi(w_1, w_2)$ jest ograniczona w $\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}$, 0 i $\infty \notin \overline{\Delta}$ oraz w_1, $\frac{1}{\overline{w}_2} \in \Delta$, wobec tego prawa strona nierówności (8) jest mniejsza od 1, jeśli tylko ε dostatecznie małe.

Wobec powyższego D^* jest obszarem symetrycznym i ograniczonym, czyli twierdzenie jest dowiedzione.

2. Stosując twierdzenie 1 oraz opierając się na metodzie Gałuzina [2] str. 125, uzyskamy wzory wariacyjne dla funkcji klasy S_{1R}.

Niech $f \in S_{1R}$, $D = f(U)$, czyli D jest obszarem symetrycznym i ograniczonym. Niech $P = \left\{z;\ r < |z| < 1\right\}$, gdzie $r > 0$, tak bliskie 1, aby $f(P) \subset \Delta$. Połóżmy

$$F(z,\varepsilon) = w^*(f(z)) \quad \text{dla} \quad z \in P.$$

$F(z,\varepsilon)$ jest funkcją holomorficzną zmiennych $z, \varepsilon \in P \times \mathbb{C}$ oraz dla $\varepsilon > 0$ dostatecznie małych jest funkcją jednolistną zmiennej $z \notin P$. Rozwijając $F(z,\varepsilon)$ na szereg Maclaurina ze względu na ε, otrzymamy

$$F(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z)\,\Phi(f(z)) + o(\varepsilon),$$

gdzie $O(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ niemal jednostajnie w P.

Z twierdzenia Gołuzina [2] str. 125 wynika, że funkcja $f^*(z)$ odwzorowująca U na D^*, $f^*(0) = 0$, postaci

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon f(z)\Phi(f(z)) - \varepsilon zf'(z)S(z) + \varepsilon zf'(z)\,\overline{S\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + o(\varepsilon), \tag{9}$$

gdzie S(z) oznacza część główną rozwinięcia funkcji

$$\frac{f(z)\,\Phi(f(z))}{zf'(z)}$$

na szereg Laurenta o środku w 0 w pierścieniu P, jest szukaną wariacją funkcji $f(z)$.

Znajdziemy obecnie funkcję $\Phi(w)$ spełniającą warunek (3) i napiszemy wariację (9) generowaną przez tę funkcję.

Niech $w_0 \in D$ i $z_0 \in U$ takie, że $w_0 = f(z_0)$. Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Połóżmy

$$\Phi(w) = \frac{e^{i\alpha}}{w-w_0} + \frac{e^{-i\alpha}}{w-\bar w_0} - \frac{w\,e^{-i\alpha}}{1-\bar w_0 w} - \frac{w\,e^{i\alpha}}{1-w_0 w}. \tag{10}$$

Istnieje obszar Δ tak bliski brzegu obszaru D, że $\Phi(w)$ jest analityczna w $\bar\Delta$. Poza tym funkcja $\Phi(w)$ spełnia warunek (3). Aby otrzymać wariację (9) funkcji $f(z)$ generowaną przez funkcję (10), należy znaleźć funkcję S(z), czyli część główną rozwinięcia Laurenta w zerze funkcji

$$\frac{f(z)}{zf'(z)}\left[\frac{e^{i\alpha}}{f(z)-f(z_0)} + \frac{e^{i\alpha}}{f(z)-f(\bar z_0)} - \frac{f(z)e^{-i\alpha}}{1-f(\bar z_0)f(z)} - \frac{f(z)\,e^{i\alpha}}{1-f(z_0)f(z)}\right].$$

Bez trudności otrzymujemy, że

$$S(z) = \frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z-z_0} + \frac{f(\bar z_0)}{\bar z_0 f'(\bar z_0)}\,\frac{e^{-i\alpha}}{z-\bar z_0}.$$

Stąd oraz z (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^*(z) = f(z) &+ \varepsilon\left[\frac{e^{i\alpha}f(z)}{f(z)-f(z_0)} + \frac{e^{-i\alpha}f(z)}{f(z)-f(\bar z_0)} - \frac{e^{-i\alpha}f^2(z)}{1-f(\bar z_0)f(z)}\right.\\ &\left. - \frac{e^{i\alpha}f^2(z)}{1-f(z_0)f(z)}\right] - \varepsilon zf'(z)\left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z-z_0} + \frac{f(\bar z_0)}{\bar z_0 f'^2(\bar z_0)}\,\frac{e^{-i\alpha}}{z-\bar z_0}\right] +\\ &+ \varepsilon zf'(z)\left[\frac{f(\bar z_0)}{\bar z_0 f'^2(\bar z_0)}\,\frac{e^{-i\alpha}\,\bar z}{1-z\bar z_0} + \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha}\,z}{1-zz_0}\right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

W przypadku, gdy $w_0 \notin \bar{D}$ i $\frac{1}{\bar{w}_0} \notin \bar{D}$, funkcja (10) jest analityczna w $\bar{D}$ i złożenie $w^*(f(z))$ daje już wariację funkcji $f(z)$.

Otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w postaci następujących twierdzeń.

Twierdzenie 2

Niech $f \in S_{1R}$, α dowolna liczba rzeczywista, $z_0 \in U$; wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $f^* \in S_{1R}$, taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left[\frac{e^{i\alpha} f(z)}{f(z) - f(z_0)} + \frac{e^{-i\alpha} f(z)}{f(z) - f(\bar{z}_0)} - \frac{e^{-i\alpha} f^2(z)}{1 - f(\bar{z}_0) f(z)} - \frac{e^{i\alpha} f^2(z)}{1 - f(z_0) f(z)}\right] - \varepsilon z f'(z)\left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha}}{z - z_0} + \frac{f(\bar{z}_0)}{\bar{z}_0 f'^2(\bar{z}_0)}\,\frac{e^{-i\alpha}}{z - \bar{z}_0}\right] +$$

$$+ \varepsilon z f'(z)\left[\frac{f(\bar{z}_0)}{\bar{z}_0 f'^2(\bar{z}_0)}\,\frac{e^{-i\alpha} z}{1 - \bar{z}_0 z} + \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)}\,\frac{e^{i\alpha} z}{1 - z_0 z}\right] + o(\varepsilon),$$

gdzie $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U.

Twierdzenie 3

Niech $f \in S_{1R}$, α dowolna liczba rzeczywista oraz w_0 takie, że $w_0 \notin \overline{f(U)}$ i $\frac{1}{w_0} \notin \overline{f(U)}$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja $f^* \in S_{1R}$ taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon\left[\frac{e^{i\alpha} f(z)}{f(z) - w_0} + \frac{e^{-i\alpha} f(z)}{f(z) - \bar{w}_0} - \frac{e^{-i\alpha} f^2(z)}{1 - \bar{w}_0 f(z)} - \frac{e^{i\alpha} f^2(z)}{1 - w_0 f(z)}\right] + o(\varepsilon), \tag{12}$$

gdzie $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U.

Znajdziemy obecnie dla funkcji $f \in S_{1R}$ pewną wariację opartą na odwzorowaniu koła U w U.

Zauważmy mianowicie, że jeśli $h(z)$ jest funkcją jednolistną w U, $h(0) = 0$, $h(U) \subset U$, $h'(0) > 0$ oraz $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$, to $f(h(z)) \in S_{1R}$. Kładąc $h(z) = K_\alpha^{-1}\left[(1-\varepsilon)K_\alpha(z)\right]$, gdzie $K_\alpha(z) = z(1-z)^{\cos\alpha - 1}(1+z)^{-\cos\alpha - 1}$, α - dowolna liczba rzeczywista, $\varepsilon > 0$ oraz dla $z=0$ zachodzi $(1-z)^{1-\cos\alpha} = 1$ i $(1+z)^{1+\cos\alpha} = 1$, otrzymujemy wariację funkcji $f(z)$ postaci

$$f^*(z) = f(z) - \varepsilon f'(z)\,\frac{K_\alpha(z)}{K'_\alpha(z)} + o(\varepsilon),$$

czyli

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon z f'(z)\left[\frac{z_0}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{z - \bar{z}_0} + 1\right] + o(\varepsilon), \quad z_0 = e^{i\alpha}. \tag{13}$$

3. Niech $\Phi(f)$ będzie funkcjonałem rzeczywistym, określonym i ciągłym w S_{1R}. Niech $H(U)$ oznacza przestrzeń funkcji holomorficznych w U z topologią zbieżności niemal jednostajnej. Zakładamy, że $\Phi(f)$ ma pochodną zespoloną w sensie Frécheta w punkcie f, tzn. istnieje funkcjonał $L_f \in H'(U)$ taki, że

$$\Phi(f^*) = \Phi(f) + \varepsilon \operatorname{Re} L_f(h) + o(\varepsilon), \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon > 0$, $f^* \in S_{1R}$ taka, że

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon), \quad h(z) \in H(U), \tag{15}$$

oraz $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$, niemal jednostajnie w U.

Podobnie jak w [1] str. 12, przyjmujemy oznaczenia

$$D(w) = L_f\left(\frac{wf}{f-w}\right), \quad E(\zeta) = L_f\left(\frac{\zeta z f'(z)}{z-\zeta}\right),$$

$$A(w) = D(w) + L_f(f) + \overline{D\left(\frac{1}{\bar w}\right)}, \quad B(\zeta) = E(\zeta) + \overline{L_f(zf'(z))} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}. \tag{16}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} -\frac{wf^2}{1-wf} &= f + \frac{f}{w\left(f - \frac{1}{w}\right)}, \\ -\frac{\zeta z^2 f'(z)}{1-\zeta z} &= zf'(z) + \frac{zf'(z)}{\zeta\left(z - \frac{1}{\zeta}\right)}, \end{aligned} \tag{17}$$

Korzystając z (11), (14), (15), (16) i (17), otrzymamy

$$\Phi(f^*) = \Phi(f) + \varepsilon \operatorname{Re}\left\{ \frac{e^{i\varphi}}{f(z_0)}\left[A(f(z_0)) - \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2 B(z_0)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\varphi}}{f(\bar z_0)}\left[A(f(\bar z_0)) - \overline{\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2} B(\bar z_0)\right]\right\} + o(\varepsilon) \tag{18}$$

dla każdego $z_0 \in U$, φ dowolnej liczby rzeczywistej i $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego. Możemy obecnie udowodnić następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 4</u>

Niech $\Phi(f)$ będzie funkcjonałem rzeczywistym, określonym i ciągłym na S_{1R}, mającym w punkcie $f \in S_{1R}$ pochodną w sensie Frécheta. Niech f realizuje ekstremum lokalne tego funkcjonału w S_{1R}, wówczas f spełnia następujące równani

$$\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^2 \left[A(f(z)) + \overline{A(f(\bar{z}))}\right] = B(z) + \overline{B(\bar{z})}, \quad z \in U \qquad (19)$$

lub równoważne równanie

$$\left[A(w) + \overline{A(\bar{w})}\right] \frac{dw^2}{w^2} = \left[B(z) + \overline{B(\bar{z})}\right] \frac{dz^2}{z^2}, \quad w=f(z), \ z \in U, \qquad (19')$$

gdzie $A(w)$ i $B(z)$ są zdefiniowane w (16). Prawa strona równania (19) dla $|z| = 1$ jest rzeczywista i niedodatnia, gdy f realizuje maksimum lokalne Φ oraz nieujemna w przypadku, gdy f realizuje minimum lokalne Φ. Jeśli $A(f(z)) + \overline{A(f(\bar{z}))}$ jest analityczna w pewnym pierścieniu $\{z; \varrho<|z|<1\}$, to $f(z)$ odwzorowuje U na pewien obszar, którego brzeg składa się z analitycznych łuków, które są trajektoriami różniczki kwadratowej

$$\left[A(w) + \overline{A(\bar{w})}\right] \frac{dw^2}{w^2}.$$

Dowód

Fakt, że funkcja $f(z)$ spełnia równanie (19) wynika z (18), z dowolności α oraz z tego, że $f(z)$ realizuje ekstremum lokalne funkcjonału Φ.

Z (16) wynika, że dla $|z| = 1$ prawa strona równania (19) jest rzeczywista oraz ma postać

$$B(z) + \overline{B(\bar{z})} = 2\mathrm{Re}\, L_f\left(\zeta f'(\zeta)\left[\frac{z}{\zeta-z} + \frac{\bar{z}}{\zeta-\bar{z}} + 1\right]\right).$$

Z (13) wynika dalej, że gdy f realizuje maksimum lokalne Φ, to $B(z) + \overline{B(\bar{z})} < 0$ dla $|z| = 1$ oraz $B(z) + \overline{B(\bar{z})} > 0$ dla $|z| = 1$, gdy f realizuje minimum lokalne Φ.

$A(f(z)) + \overline{A(f(\bar{z}))}$ jest analityczna w $\{z; \varrho<|z|<1\}$, a więc z analiczności funkcji $B(z) + \overline{B(\bar{z})}$ na $|z| = 1$ i z zasady symetrii wynika, że

$$\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^2 \left[A(f(z)) + \overline{A(f(\bar{z}))}\right]$$

jest analityczna na $|z| = 1$ poza izolowanymi biegunami. Dla $z = e^{it}$, $\frac{dz}{z} = i \cdot dt$ i z (19) otrzymujemy, że $\partial f(U)$ składa się z trajektorii różniczki kwadratowej $\left[A(w) + \overline{A(\bar{w})}\right]\frac{dw^2}{w^2}$.

Twierdzenie 5

Niech Φ oraz f spełniają założenia poprzedniego twierdzenia, $A(w) + \overline{A(\bar{w})}$ jest funkcją meromorficzną w $\mathbb{C}$ i nierówną tożsamościowo zero. Jeśli w_0 i w_0^{-1} nie należą do zbioru $D = f(U)$, to co najmniej jeden z tych punktów znajduje się na brzegu obszaru D oraz brzeg obrzaru D zawiera okrąg jednostkowy $|\ | = 1$.

Dowód

Załóżmy nie wprost, że w_0 i $w_0^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(U)}$. Korzystając ze wzoru wariacyjnego (12) oraz z dowolności α wnioskujemy, że istnieje otoczenie punktu w_0, w którym $A(w) + \overline{A(\overline{w})} = 0$, co przeczy założeniu.

Dla $|w| = 1$ zachodzi $w^{-1} = \overline{w}$ czyli z symetryczności obszaru D wynika, że do brzegu obszaru D należą wszystkie punkty okręgu jednostkowego $|w| = 1$.

4. Dla każdego T, $0<T<1$, niech S_{1R}^T oznacza zbiór funkcji klasy S_{1R}, dla których $b_1 = T$. S_{1R}^T jest oczywiście zbiorem zwartym dla każdego T.

Szukamy maksimum $|b_2|$ dla b_1 ustalonego. Funkcja ekstremalna $f \in S_{1R}^{b_1}$ istnieje i jest lokalnym maksimum w $S_{1R}^{b_1}$ dla $\mathrm{Re}\Psi(f)$, gdzie

$$\Psi(f) = \lambda \log b_1 + \log b_2, \tag{20}$$

gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a. Dla takiego funkcjonału różniczka Frécheta w punkcie $f \in S_{1R}$ ma postać

$$L_f(g) = \lambda \chi_1(g)/b_1 + \chi_2(g)/b_2, \tag{21}$$

gdzie $\chi_i(g)$ jest i-tym współczynnikiem rozwinięcia funkcji $g(z)$ na szereg Maclaurina. Stąd oraz z twierdzenia 4 otrzymujemy, że funkcja ekstremalna f spełnia równanie

$$\left[(\mathrm{Re}\,\lambda + 1) + \frac{b_1^2}{b_2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right]\frac{dw^2}{w^2} = \left[(\mathrm{Re}\,\lambda + 2) + \frac{b_1}{b_2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz^2}{z^2} \tag{22}$$

dla $|z| < 1$. Po zmianie znaku obu stron w (22) otrzymujemy, że prawa strona w (22) jest niedodatnia dla $|z| = 1$.

Niech $|z| = 1$. Korzystając z (13) oraz z tego, że f realizuje maksimum lokalne $\mathrm{Re}\,\Psi$ otrzymujemy, że

$$\mathrm{Re}\left[\lambda + 2 + \frac{b_1}{b_2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right)\right] \geq 0,$$

dla każdego $|z| = 1$. Ponieważ $z = e^{i\alpha}$ jest dowolnym punktem, dostajemy warunek $\mathrm{Re}\,\lambda + 2 + 2\frac{b_1}{b_2}\cos\alpha \geq 0$. Wobec tego $\mathrm{Re}\,\lambda + 2 \geq 2\frac{b_1}{|b_2|} > 1$, czyli $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ dla $f \in S_{1R}$.

W równaniu (22) wprowadzamy nowe zmienne

$$2W = \frac{1}{w} + w, \quad 2Z = \frac{1}{z} + z. \tag{23}$$

Z twierdzenia 5 wynika, że $w = f(z)$ definiuje W jako jednolistną funkcję zmiennej Z, odwzorowującą zewnętrze przedziału $[-1,1]$ na zewnętrze pewnego kontinuum Γ zawierającego odcinek $I = [-1,1]$ i nie mającego wnętrza. Ze względu na $W^2 - 1 = (w - w^{-1})^2/4$, mamy $\frac{dw^2}{w^2} = \frac{dW^2}{W^2 - 1}$.
Stąd, oraz z (22) wynika, że

$$\frac{(1 + GW)\, dW^2}{1 - W^2} = \varrho \frac{(1 + \tau Z)\, dZ^2}{1 - Z^2}, \tag{24}$$

gdzie

$$G = \frac{2b_1^2}{b_2(\mathrm{Re}\,\lambda + 1)}, \quad \tau = \frac{2b_1}{b_2(\mathrm{Re}\,\lambda + 2)}, \quad \varrho = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda + 2}{\mathrm{Re}\,\lambda + 1}.$$

Widzimy, że $G, \tau, \varrho \in R$ oraz $\varrho > 1$ i $-1 \leq \tau \leq 1$. Prawa strona w równaniu (24) jest rzeczywista i niedodatnia dla $Z \in [-1,1]$. Jeśli $-1 < \tau < 1$, to prawa strona w (24) zeruje się w punkcie $-\frac{1}{\tau} \notin I$ i wtedy kontinuum Γ nie zawiera punktu krytycznego $s = -\frac{1}{G}$ różniczki kwadratowej

$$d\Omega^2 = \frac{(1 + GW)dW^2}{1 - W^2}.$$

Jeśli $\tau = \pm 1$, to Γ może zawierać s.

Zanalizujmy obecnie dokładniej kontinuum Γ. Wiemy, że zawiera odcinek $I = [-1,1]$ oraz może zawierać lub nie punkt s. Poza tym do Γ mogą należeć łuki analityczne, które są trajektoriami różniczki kwadratowej $d\Omega^2$.

Trajektoriami różniczki kwadratowej $d\Omega^2$ są: ($|s|>1$) trzy łuki analityczne wychodzące z punktu s pod równymi kątami oraz odcinek I, ($|s| < 1$) odcinek I, ($|s| = 1$) półproste $(-1, +\infty)$ lub $(-\infty, 1)$.

W przypadku, gdy $|s| < 1$ lub $|s| > 1$, to $\Gamma = I$ oraz $f(U) = U$. Ponieważ $b_1 > 0$, to $f(z) = z$ i $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Funkcja ta nie należy do klasy S_{1R}^T dla $0 < T < 1$.

Jeżeli $\tau, G = \pm 1$, to $d\Omega^2$ upraszcza się. Rozważając, np. $G = 1$, mamy $d\Omega^2 = \frac{dW^2}{1 - W}$; wtedy jedyną trajektorią zawierającą odcinek I jest nieskończony przedział $(-\infty, 1]$. Stąd Γ zawiera przedział $[x, 1]$, $-\infty < x < -1$ i $f = f(z)$ odwzorowuje U na U z wycięciem $[-1,\alpha]$, $-1 < \alpha < 0$. Oznaczając $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ dostaniemy warunek $k(f(z)) = \frac{k(z)}{a}$, $a \in R$, $a \neq 0$. Biorąc pochodną dla $z = 0$ otrzymujemy $b_1 = \frac{1}{a}$,

czyli

$$\frac{f(z)}{[1 - f(z)]^2} = \frac{b_1 z}{(1 - z)^2}.$$

Porównując współczynniki przy z^2 otrzymamy równość

$$b_2 = 2b_1 (1 - b_1). \tag{25}$$

To jest kres górny dla drugiego współczynnika funkcji ograniczonych podany przez Picka. Przypadek $\sigma = -1$ jest analogiczny i daje równość(25). Współczynnik $b_1 = \frac{1}{\varrho}$ ponieważ $|\sigma| = 1$ i $|\tau| = 1$.

Możemy obecnie sformułować następujące dowiedzione twierdzenie.

Twierdzenie 6

Niech $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ będzie funkcją klasy S_{1R} realizującą maksimum lokalne dla $\operatorname{Re}\left\{\lambda \log b_1 + \log b_2\right\}$, gdzie $0 < b_1 < 1$. Wtedy $\operatorname{Re}\lambda > -1$ oraz $b_2 = 2b_1(1 - b_1)$, $b_1 = \frac{1}{\varrho}$, gdzie $\varrho = (\operatorname{Re}\lambda + 2)(\operatorname{Re}\lambda + 1)^{-1}$.

LITERATURA

[1] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational metods for Bieberbach-Eilenberg functions and for pair., Ann. Acad. Sci. Fennicae. ser. A.J. Mathematica, Vol 3, 1977, 3-42.

[2] Голузин П.М.: Геометрическая теория функций комплексного переменного, "Наука", Москва 1966.

[3] Černikov V.V.: Extremal problems of univalent functions with real coefficients I, II (Russian), Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. 169, 69-95.

[4] Jakubowski Z.J.: O współczynnikach funkcji jednolistnych i symetrycznych w kole jednostkowym., Bull. Acad. Polon. Sci., 1966, 641-644.

[5] Charzyński Z., Śmiałkówna H.: The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional, Biulletin de la Societe de Sciences et Lettres de Łódź 1961, VOL XII 13.

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ, ОГРАНИЧЕННЫХ И СИМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Резюме

В работе найдено вариационные формулы для класса однолистных, ограниченных и симетрических функций в единичном круге, пользуясь работой [1] И.А. Хаммеля и М.М. Шиффера. Полученные формулы были применены для получения оценки Пика второго козффицента в разложении в степенной ряд этих функций.

VARIATIONAL METHODS FOR UNIVALENT BOUNDED AND SYMMETRIC FUNCTIONS

Summary

In this paper have been given some variational methods for univalent, bounded and symmetric functions in the unit disk, based on [1]. The variational methods, which have been obtained, were applied to prove the familiar Pick bound for the second coefficient of a bounded functions.