ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol.623

Roman TARGOSZ

WZORY NA WSPÓŁCZYNNIKI NEHARIEGO DLA PAR AHARONOWA FUNKCJI JEDNOLISTNYCH

Streszczenie. Praca zawiera wzory umożliwiające wyliczenie współczynników występujących w nierównościach typu Grunsky'ego dla par funkcji (F, G) Aharonowa.

WSTĘP

Rozpatrzmy klasę A par funkcji $\big(F(z), G(z)\big)$ analitycznych i jednolistnych w $U = \{z: |z|<1\}$, spełniających warunki $F(0) = G(0) = 0$, $F'(0) \neq 0$, $G'(0) \neq 0$, $F(z_1) \cdot G(z_2) \neq 1$ dla dowolnych $z_1, z_2 \in U$. Połóżmy

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \tag{1}$$

$$\log \frac{F(u) - F(v)}{u - v} = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}(F) u^m v^n, \tag{2}$$

$$-\log\left[1-F(u)G(v)\right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} k_{mn}\, F,\, G\, u^m v^n \tag{3}$$

Nierówność Nehariego dla par (F, G) przyjmuje postać [1]:

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda^2\left[c_{00}(F) + c_{00}(G)\right] + 2\lambda\left[\sum_{n=1}^{N} c_{n0}(F)\alpha_n - \sum_{n=1}^{N} c_{n0}(G)\beta_n\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}(F)\alpha_m\alpha_n + \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}(G)\beta_m\beta_n + 2\sum_{m,n=1}^{N} k_{mn}(F,G)\alpha_m\beta_n\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\alpha_n|^2}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{|\beta_n|^2}{n}, \tag{4}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_N$, są liczbami zespolonymi α jest rzeczywiste. Współczynniki Nehariego $c_{mn}(F)$, $k_{mn}(F, G)$ są określone przez (2) i (3). Macierz (c_{mn}) jest symetryczna, natomiast macierz (k_{mn}) nie musi być symetryczna, będzie taką, gdy np. $F \equiv G$.

1. Niech r będzie liczbą rzeczywistą, a $s_1, s_2, \ldots, s_k$ liczbami całkowitymi nieujemnymi takimi, że $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2 > 0$. Niech dalej $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$; wówczas kładziemy

$$\binom{r}{s_1, s_2, \ldots, s_k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{s_1!\, s_2! \ldots s_k!} \tag{5}$$

Niech $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots +$ będzie funkcją analityczną w pewnym kole o środku w zerze. Wtedy dla nieujemnego całkowitego r mamy w tym kole rozwinięcie

$$[f(z)]^r = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(r)} z^k, \tag{6}$$

gdzie $c_o^{(r)} = c_o^r$,

a dla $k = 1, 2, \ldots$

$$c_k^{(r)} = \sum_{(s_1, \ldots, s_k) \in S_k} \binom{r}{s_1, \ldots, s_k} c_o^{r-s} c_1^{s_1} c_2^{s_2} \ldots c_k^{s_k}, \tag{7}$$

gdzie

$$S_k = \left\{(s_1, \ldots, s_k) : s_j \geq 0,\quad s_1 + 2s_2 + \ldots + ks_k = k\right\}.$$

Ponadto w przypadku, gdy $c_o > 0$ rozwinięcie (6) pozostaje prawdziwe, gdy r jest liczbą wymierną.

2. Wzory dla współczynników $c_{mn}^{(2)}(F)$. Niech $(F,G) \in A$. Rozważmy dalej parę $([F(z^2)]^{\frac{1}{2}}, G(z^2)^{\frac{1}{2}})$ również należącą do A. Połóżmy

$$c_{mn}^{(2)}(F) = c_{mn}([F(z^2)]^{\frac{1}{2}})$$

i niech $F(z) = a_1(z + \alpha_2 z^2 + \ldots) = a_1 \cdot f(z)$, gdzie $\alpha_n = a_{n/a_1}$, $f(z) \in S$ (S jest klasą funkcji analitycznych jednolistnych w U z normalizacją $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$); (2) przyjmie wówczas postać

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}^{(2)}(F)u^m v^n = \log \frac{[F(u^2)]^{\frac{1}{2}} - [F(v^2)]^{\frac{1}{2}}}{u - v} = \frac{1}{2}\log a_1 +$$

$$+ \log \frac{[f(u^2)]^{\frac{1}{2}} - [f(v^2)]^{\frac{1}{2}}}{u - v} \tag{8}$$

Jeśli $m,n \neq 0$ wówczas $c_{mn}^{(2)}(F) = \omega_{mn}^{(2)}(f)$, gdzie $\omega_{mn}^{(2)}(f)$ są współczynnikami Grunsky'ego funkcji $f \in S$ [2]. Jeśli $v = 0$, wtedy z (8) otrzymujemy

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{mo}^{(2)}(F)\, u^m = \frac{1}{2}\log \frac{F(u^2)}{u^2} = \frac{1}{2}\log (a_1 + a_2 u^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\log a_1 + \frac{1}{2}\log (1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^4 + \ldots).$$

Dla u dostatecznie małych otrzymujemy dalej

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{mo}^{(2)}(F)\, u^m = \frac{1}{2}\log a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(\alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^4 + \ldots)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\log a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[u^{2k}(\alpha_2 + \alpha_3 u^2 + \ldots)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\log a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\alpha_{m+2}^{(k)}\; u^{2(k+m)}.$$

Jeśli położymy $p = m + n$, wówczas $p > 1$, $1 < n = p - m$, $0 < m < p - 1$. Zatem

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{mo}^{(2)}(F)\, u^m = \frac{1}{2}\log a_1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-m+1}}{p-m}\alpha_{m+2}^{(p-m)}\, u^{2p}. \tag{9}$$

Widzimy, że dla m nieparzystych $c_{mo}^{(2)}(F) = 0$. Jeśli $m = 2p$, wtedy

$$c_{2p,o}^{(2)}(F) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-m+1}}{p-m}\alpha_{m+2}^{(p-m)}. \tag{10}$$

Wykorzystując (7), możemy napisać

$$\alpha_{m+2}^{(p-m)} = \sum_{S_m} \binom{p-m}{s_1,\ldots,s_m} \alpha_2^{p-m-s}\, \alpha_3^{s_1} \ldots \alpha_{m+2}^{s_m}.$$

Zatem (10) przyjmie postać

$$c^{(2)}_{2p,o}(F) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-m+1}}{p-m}\sum_{S_m}\binom{p-m}{s_1,\ldots,s_m}\alpha_2^{p-m-s}\alpha_3^{s_1}\ldots\alpha_{m+2}^{s_m} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-m+1}}{p-m}\sum_{S^m_{p-1}}\binom{p-m}{s_1,\ldots,s_{p-1}}\alpha_2^{p-m-s}\alpha_3^{s_1}\ldots\alpha_{p+1}^{s_{p-1}}$$

Rzeczywiście, skoro $m \leqslant p-1$, to uzupełniając zerami układy $(s_1,\ldots,s_m) \in S_m$ do układów $(s_1,\ldots,s_m,\ldots,s_{p-1})$, wyczerpiemy zbiór $S^m_{p-1} = \{(s_1,\ldots,s_{p-1}):$ $s_j \geqslant 0,\ s_1 + s_2 + \ldots + s_{p-1} \leqslant p-m,\ s_1 + 2s_2 + \ldots + (p-1)\, s_{p-1} = m\}$.

Korzystając teraz z następującego lematu [3]:

Lemat

Dla dowolnej funkcji $\varphi_{k,n}(s_1,\ldots,s_k)$, $0 \leqslant n \leqslant k$, $k=1,2,\ldots$, mamy

$$\sum_{n=0}^{K}\ \sum_{(s_1,\ldots,s_k)\in S^n_k}\varphi_{k,n}(s_1,\ldots,s_k) =$$

$$= \sum_{(s_o,s_1,\ldots,s_k)\in S_{k+1}}\varphi_{k,k+1-s-s_o}(s_1,\ldots,s_k).$$

gdzie $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$. Inaczej

$$\sum_{\bigcup_{n=0}^{k} S^n_k}\varphi_{k,n}(s_1,\ldots,s_k) = \sum_{Q_{k+1}}\varphi_{k,k+1-q}(q_2,\ldots,q_{k+1}),$$

gdzie $Q_l \ \{(q_1,\ldots,q_l) : q_j \geqslant 0,\ q_1 + 2q_2 + \ldots + lq_l = 1,\ q=q_1+\ldots+q_l\}$, ostatecznie otrzymujemy następujące

Twierdzenie 1

Jeśli $(F,G) \in \mathbf{A}$, wówczas $c^{(2)}_{mo}(F) = 0$ dla m nieparzystych. Jeśli $m=2p$, wtedy

$$c^{(2)}_{oo}(F) = \frac{1}{2}\log a_1,$$

$$c^{(2)}_{2p,o}(F) = \frac{1}{2} \sum_{Q_p} \frac{(-1)^{q+1}}{q} \binom{q}{q_1,\dots,q_p} \alpha_2^{q_1} \dots \alpha_{p+1}^{q_p}, \quad p > 1.$$

Tabela współczynników symetrycznych $c^{(2)}_{mo}(F)$ dla $m = 2p$, $p = 0,1,\dots,5$

$$c^{(2)}_{oo}(F) = \frac{1}{2} \log a_1$$

$$c^{(2)}_{20}(F) = \frac{1}{2} \alpha_2$$

$$c^{(2)}_{40}(F) = \frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_2^2)$$

$$c^{(2)}_{60}(F) = \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 + \frac{1}{3} \alpha_2^2)$$

$$c^{(2)}_{80}(F) = \frac{1}{2} (\alpha_5 - \alpha_2 \alpha_4 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 - \frac{1}{4} \alpha_2^4)$$

$$c^{(2)}_{10,0}(F) = \frac{1}{2}(\alpha_6 - \alpha_2 \alpha_5 - \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2^2 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3^2 - \alpha_2^3 \alpha_3 + \frac{1}{5} \alpha_2^5)$$

3. Wzory dla współczynników $k^{(2)}_{mn}(F,G)$. Niech $(F,G) \in A$; połóżmy

$$k^{(2)}_{mn}(F,G) = k_{mn}([F(u^2)]^{\frac{1}{2}}, [G(v^2)]^{\frac{1}{2}})$$

i niech $G(z) = b_1 (z + \beta_2 z^2 + \dots) = b_1 g(z)$, gdzie $\beta_n = \frac{b_n}{b_1}$, $g(z) \in S$. (3) przyjmie wówczas postać

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} k^{(2)}_{mn}(F,G) u^m v^n = - \log \left[1 - F(u^2)^{\frac{1}{2}} G(v^2)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left[F(u^2) G(v^2)\right]^{\frac{p}{2}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(uv)^p}{p} (a_1+a_2u^2 + \dots)^{\frac{p}{2}} (b_1+b_2v^2+\dots)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k+1}^{(\frac{p}{2})} b_{l+1}^{(\frac{p}{2})} u^{p+2k} v^{p+2l} \tag{11}$$

Jeśli położymy $\mu = p + 2k$, $\vartheta = p + 2l$ wtedy $k \leq \frac{\mu-1}{2}$, $l < \frac{\vartheta-1}{2}$. Dalej $\mu - \vartheta = 2(k-l) = 2g$, jeśli więc m-n jest nieparzyste, wtedy $k^{(2)}_{mn}(F,G) = 0$. Jeśli natomiast $m-n = 2g$, $q = 0,1,2,\ldots$, wtedy

$$k^{(2)}_{n+2q,n}(F,G) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{n-2l}\, a_{l+q+1}^{(\frac{n}{2}-l)}\, b_{b+1}^{(\frac{n}{2}-l)}, \quad \begin{matrix} n=1,2,\ldots \\ q=0,1,2,\ldots \end{matrix} \tag{12}$$

Korzystając teraz z przedstawień

$$a_{l+q+1}^{(\frac{n}{2}-l)} = \sum_{S_{l+q}} \binom{\frac{n}{2}-l}{s_1,\ldots,s_{l+q}} a_1^{\frac{n}{2}-l-s}\, a_2^{s_1}\ldots a_{l+q+1}^{s_{l+q}},$$

$$b_{l+1}^{(\frac{n}{2}-l)} = \sum_{R_l} \binom{\frac{n}{2}-l}{r_1,\ldots,r_l} b_1^{\frac{n}{2}-l-r}\, b_2^{r_1}\ldots b_{l+1}^{r_l},$$

otrzymamy

$$k^{(2)}_{n+2q,n}(F,G) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{n-2l} \left[\sum_{S_{l+q}} \binom{\frac{n}{2}-l}{s_1,\ldots,s_{l+q}} a_1^{\frac{n}{2}-l-s}\, a_2^{s_1}\ldots a_{l+q+1}^{s_{l+q}}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{R_l} \binom{\frac{n}{2}-l}{r_1,\ldots,r_l} b_1^{\frac{n}{2}-l-r}\, b_2^{r_1}\ldots b_{l+1}^{r_i}\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(a_1 b_1)^{\frac{n}{2}-l}}{n-2l} \sum_{S_{l+q}} \sum_{R_l} \binom{\frac{n}{2}-1}{s_1,\ldots,s_{l+q}} \binom{\frac{n}{2}-1}{r_1,\ldots,r_l} \alpha_2^{s_1}\ldots\alpha_{l+g+1}^{s_{l+q}}\beta_2^{r_1}\ldots\beta_{l+1}^{n} \tag{13}$$

Mamy zatem

<u>Twierdzenie 2</u>

Jeśli $(F,G) \in \mathbf{A}$ wówczas $k^{(2)}_{mn}(F,G) = 0$, gdy $m - n$ jest nieparzyste. Jeśli $m = n + 2q$, $q = 0,1,2,\ldots$, wtedy

$$k^{(2)}_{n+2q,n}(F,G) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(a_1b_1)^{\frac{n}{2}-l}}{n-2l} \sum_{S_{l+q}} \sum_{R_l} \binom{\frac{n}{2}-l}{s_1,\dots,s_{l+q}} \binom{\frac{n}{2}-l}{r_1,\dots,r_l} \alpha_2^{s_1}\dots\alpha_{l+q+1}^{s_{l+q}} \beta_2^{r_1}\dots\beta_{l+1}^{r_l}$$

gdzie $\alpha_n = \frac{a_n}{a_1}$, $\beta_n = \frac{b_n}{b_1}$, $n = 1,2,\dots$.

Dla zbudowania tabeli współczynników $k^{(2)}_{mm}(F,G)$ oznaczymy

$$\Omega_o^{(x)} = 1,$$

a dla $0 \leqslant l \leqslant \left[x - \frac{1}{2}\right]$ i $l + q = 1,2,\dots$

$$\Omega^{(x-l)}_{l+q}(F) = \sum_{S_{l+q}} \binom{x-l}{s_1,\dots,s_{l+q}} \alpha_2^{s_1}\dots\alpha_{l+q+1}^{s_{l+q}},$$

$$\Omega^{(x-l)}_{l+q}(G) = \sum_{R_{l+q}} \binom{x-l}{r_1,\dots,r_{l+q}} \beta_2^{r_1}\dots\beta_{l+q+1}^{r}.$$

Wówczas (13) przyjmie postać

$$k^{(2)}_{n+2q,n}(F,G) = \sum_{l=0}^{\left[x-\frac{1}{2}\right]} \frac{(a_1b_1)^{x-l}}{2(x-l)} \Omega^{(x-l)}_{l+q}(F)\ \Omega^{(x-l)}_{l}(G)$$

$n = 1,2,\dots$ $q = 0,1,2,\dots$.

Tabela wartości $\Omega^{(r)}_{l+q}(F)$ dla $0 < l+q < 4$

$\Omega_o^{(r)} = 1$

$\Omega_1^{(r)}(F) = r\alpha_2$

$\Omega_2^{(r)}(F) = r\alpha_3 + \frac{1}{2} r(r-1)\alpha_2^2$

$\Omega_3^{(r)}(F) = r\alpha_4 + r(r-1)\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{6} r(r-1)(r-2)\alpha_2^3$

$\Omega_4^{(r)}(F) = r\alpha_5 + r(r-1)\alpha_2\alpha_4 + \frac{1}{2} r(r-1)\alpha_3^2 + \frac{1}{2} r(r-1)(r-2)\alpha_2^2\alpha_3 +$

$+ \frac{1}{24} r(r-1)(r-2)(r-3)\alpha_2^4$.

Dla wyliczenia początkowych wartości $k_{mn}^{(2)}(F,G)$ zbudujemy pomocniczą tabelę, dla której $0 < q = \frac{m-n}{2} < 4$, $0 < \left[x - \frac{1}{2}\right] < 4$, $x = \frac{n}{2}$, $A = a_1 b_1$

	$\left[x-\frac{1}{2}\right] = 0$	$= 1$	$= 2$	$= 3$	$= 4$
$q=0$	$\frac{A^x}{2x}$	$\frac{A^{(x-1)}}{2(x-1)}\Omega_1^{(x-1)}(F)\,\Omega_1^{(x-1)}(G)$	$\frac{A^{(x-2)}}{2(x-2)}\Omega_2^{(x-2)}(F)\,\Omega_2^{(x-2)}(G)$	$\frac{A^{(x-3)}}{2(x-3)}\Omega_3^{(x-3)}(F)\,\Omega_3^{(x-3)}(G)$	$\frac{A^{(x-4)}}{2(x-4)}\Omega_4^{(x-4)}(F)\,\Omega_4^{(x-4)}(G)$
$q=1$	$\frac{A^x}{2x}\Omega_1^{(x)}(F)$	$\frac{A^{(x-1)}}{2(x-1)}\Omega_2^{(x-1)}(F)\,\Omega_1^{(x-1)}(G)$	$\frac{A^{(x-2)}}{2(x-2)}\Omega_3^{(x-2)}(F)\,\Omega_2^{(x-2)}(G)$	$\frac{A^{(x-3)}}{2(x-3)}\Omega_4^{(x-3)}(F)\,\Omega_3^{(x-3)}(G)$	
$q=2$	$\frac{A^x}{2x}\Omega_2^{(x)}(F)$	$\frac{A^{(x-1)}}{2(x-1)}\Omega_3^{(x-1)}(F)\,\Omega_1^{(x-1)}(G)$	$\frac{A^{(x-2)}}{2(x-2)}\Omega_4^{(x-2)}(F)\,\Omega_2^{(x-2)}(G)$		
$q=3$	$\frac{A^x}{2x}\Omega_3^{(x)}(F)$	$\frac{A^{(x-1)}}{2(x-1)}\Omega_4^{(x-1)}(F)\,\Omega_1^{(x-1)}(G)$			
$q=4$	$\frac{A^x}{2x}\Omega_4^{(x)}(F)$				

Odpowiedni współczynnik $k_{mn}^{(2)}(F,G)$ otrzymamy sumując elementy w odpowiednim wierszu, np. aby określić $k_{7,3}^{(2)}(F,G)$, znajdujemy $q = \frac{7-3}{2} = 2$, $x = \frac{3}{2}$, $\left[x-\frac{1}{2}\right] = 1$, tak więc należy zsumować dwa pierwsze elementy w trzecim wierszu

$$k_{7,3}^{(2)}(F,G) = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{3}\Omega_2^{(\frac{3}{2})}(F)\,\Omega_0^{(\frac{3}{2})}(G) + A^{\frac{1}{2}}\Omega_3^{(\frac{1}{2})}(F)\,\Omega_1^{(\frac{1}{2})}(G) =$$

$$= (a_1 b_1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{8}\alpha_2^2\right) + (a_1 b_1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\alpha_4\beta_2 - \frac{1}{8}\alpha_2\alpha_3\beta_2 + \frac{1}{32}\alpha_2^3\beta_2\right).$$

Tabela początkowych wartości współczynników $k_{mn}^{(2)}(F,G)$

(Dla uproszczenia przyjmujemy $k_{mn}^{(2)}(F,G) = k_{mn}$)

$k_{11} = \sqrt{a_1 b_1}$

$k_{31} = \frac{1}{2}\alpha_2\sqrt{a_1 b_1}$

$k_{51} = \frac{1}{2}\left(\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_2^2\right)\sqrt{a_1 b_1}$

$k_{71} = \frac{1}{2}\left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{16}\alpha_2^3\right)\sqrt{a_1 b_1}$

$k_{22} = \frac{1}{2}\,a_1 b_1$

$k_{42} = \frac{1}{2}\,a_1 b_1 \alpha_2$

$k_{62} = \frac{1}{2}\,a_1 b_1 \alpha_3$

$$k_{82} = \frac{1}{2} a_1 b_1 \alpha_4$$

$$k_{33} = \frac{1}{3} (\sqrt{a_1 b_1})^3 + \frac{1}{4} \alpha_2 \beta_2 \sqrt{a_1 b_1}$$

$$k_{53} = \frac{1}{2} \alpha_2 (\sqrt{a_1 b_1})^3 + \frac{1}{4} \beta_2 \sqrt{a_1 b_1} (\alpha_3 - \frac{1}{4} \alpha_2^2)$$

$$k_{73} = \frac{1}{2} (\alpha_3 + \frac{1}{4} \alpha_2^2)(\sqrt{a_1 b_1})^3 + \frac{1}{4} \beta_2 (\alpha_4 - \frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_3 + \frac{1}{8} \alpha_2^3) \sqrt{a_1 b_1}$$

$$k_{44} = \frac{1}{4} (a_1 b_1)^2 + \frac{1}{2} a_1 b_1 \alpha_2 \beta_2$$

$$k_{64} = \frac{1}{2} \alpha_2 (a_1 b_1)^2 + \frac{1}{2} a_1 b_1 \alpha_3 \beta_2 .$$

Znajomość współczynników $c_{mn}^{(2)}(F)$, $k_{mn}^{(2)}(F,G)$ pozwala otrzymać oszacowania pewnych funkcjonałów na klasie $\mathbf{A}$. Jeśli np. położymy w (4) $\lambda = 0$, wówczas otrzymamy

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}^{(2)}(F)\alpha_m\alpha_n + \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}^{(2)}(G)\beta_m\beta_n + 2\sum_{m,n=1}^{N} k_{mn}^{(2)}(F,G)\alpha_m\beta_n\right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{|\alpha_n|^2}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{|\beta_n|^2}{n}.$$

Kładąc teraz $N = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = e^{i\alpha}$, α - rzeczywiste i korzystając z postaci współczynnika $c_{11}^{(2)}(F) = \frac{1}{2} \alpha_2$, otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2} \alpha_2 e^{2i\alpha} + \frac{1}{2} \beta_2 e^{2i\alpha} + 2\sqrt{a_1 b_1}\, e^{2i\alpha}\right\} < 2,$$

czyli

$$\left|\frac{a_2}{a_1} + \frac{b_2}{b_1} + 4\sqrt{a_1 b_1}\right| \leq 4$$

Uwaga

Ponieważ dla dowolnego naturalnego p, jeśli $(F,G) \in \mathbf{A}$, to również $\left([F(z^p)]^{\frac{1}{p}}, [G(z^p)]^{\frac{1}{p}}\right) \in \mathbf{A}$, więc w analogiczny sposób można wyprowadzić wzory dla współczynników $c_{mo}^{(p)}(F)$ i $k_{mn}^{(p)}(F,G)$.

LITERATURA

[1] Hummel J.A.: Inequalities of Grunsky type for Aharonov pairs, J. Analyse Math. 25 (1972) 217-257.

[2] Hummel J.A.: The Grunsky coefficients of a schlicht function, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 142-150.

[3] De Temple D.W., Oulton D.B.: Formulas for the Nehari coefficients of bounded univalent functions, Can. J. Math. 29 (1977) 587-605.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕХАРЕГО ОДНОЛИСТНЫХ ПАР АХАРОНОВА

Р е з ю м е

В работе получаем формулы позволяющие вычислить коэффиценты выступающие в неравенствах типа Грунсково для однолистных пар Ахаронова.

FORMULAS FOR THE NEHARI COEFFICIENTS OF AHARONOV PAIRS UNIVALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper have been given formulas for the Nehari coefficients of univalent Aharonov pairs.