ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Jadwiga TARGOSZ
Roman TARGOSZ

METODA WARIACYJNA W ZASTOSOWANIU DO OGRANICZONYCH FUNKCJI GELFERA

Streszczenie. W pracy podane zostały wzory wariacyjne dla ograniczonych funkcji Gelfera. Wzory te pozwoliły wyprowadzić równanie różniczkowe typu równania Schiffera dla funkcji ekstremalnych oraz pewne własności obszarów ekstremalnych.

1. ROZWAŻMY NA PŁASZCZYŹNIE ZESPOLONEJ OBSZAR D

Definicja 1

Obszar D nazywamy ograniczonym obszarem Gelfera, jeśli jest obszarem jednospójnym zawartym w $U = \{z: |z|<1\}$ i takim, że jeśli $w \in D$, to $-w \notin D$. Zachodzi następujące

Twierdzenie 1

Niech D będzie ograniczonym obszarem Gelfera, Δ takim obszarem, że:

a) brzeg D zawiera się w Δ,

b) $w\in\Delta \Rightarrow -w\in\Delta$ i $\frac{1}{w}\in\Delta$ (tzn. Δ jest symetryczny względem odwzorowań $w\to -w$, $w\to\frac{1}{w}$).

Niech $\phi(w)$ będzie funkcją analityczną w $\bar{\Delta}$, spełniającą warunki:

c) $\phi(w) = \overline{\phi(-w)}$,

d) $\phi(w) = -\overline{\phi\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)}$.

Wtedy dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ funkcja $\hat{w}(w) = we^{\varepsilon\phi(w)}$ jest jednolistna w Δ i odwzorowuje brzeg D na brzeg pewnego ograniczonego obszaru Gelfera.

Dowód

Wprowadźmy funkcję

$$\Psi(w,v) = \begin{cases} \dfrac{w\phi(w) - v\phi(v)}{w - v} & \text{dla } w \neq v, \\ \phi(w) + w\phi'(w) & \text{dla } w = v, \\ \alpha_0 & \text{dla } w = \infty \text{ lub } v = \infty . \end{cases}$$

Funkcja ta jest określona i ciągła w $\bar{\Delta}\times\bar{\Delta}$. Ψ jest zatem ograniczona w $\bar{\Delta}\times\bar{\Delta}$.

Przypuśćmy, że dla dowolnie małego ε funkcja $\hat{w}(w)$ nie jest jednolistna w Δ. Istniałyby wtedy dla dowolnego ε dwa punkty w_1, $w_2 \in \Delta$, $w_1 \neq w_2$, takie że $\hat{w}(w_1) = \hat{w}(w_2)$. Ale

$$w_1 - w_2 = w_1\left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) = w_1\left[1 - \frac{\hat{w}(w_2)e^{-\varepsilon\Phi(w_2)}}{\hat{w}(w_1)e^{-\varepsilon\Phi(w_1)}}\right] = w_1\left[1 - e^{\varepsilon(\Phi(w_1)-\Phi(w_2))}\right].$$

Dla dowolnego s zachodzi $|1 - e^s| \leqslant |s|e^{|s|}$, co pociąga

$$|w_1 - w_2| = |w_1| \cdot \left|1 - e^{\varepsilon(\Phi(w_1)-\Phi(w_2))}\right| <$$

$$\leqslant |w_1| \cdot \left|\varepsilon(w_1 - w_2)\frac{1}{w_1}(\Psi(w_2, w_1) - \Phi(w_1))\right| e^{|\varepsilon(\Phi(w_1)-\Phi(w_2))|}.$$

Dzieląc przez $|w_1 - w_2| \neq 0$, uzyskujemy

$$1 < \varepsilon\left|\Psi(w_2, w_1) - \Phi(w_1)\right| e^{\varepsilon|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)|},$$

co jest niemożliwe ze względu na dowolność ε oraz ograniczoność funkcji Ψ i Φ. Dla ε dostatecznie bliskich zera funkcja $\hat{w}(w)$ jest zatem jednolistna w zbiorze Δ. $\hat{w}(w)$ odwzorowuje więc brzeg D na brzeg obszaru jednospójnego $\hat{D}$.

Pokażemy obecnie, że $\hat{D}$ jest ograniczonym obszarem Gelfera dla każdego dostatecznie małego ε, tzn. że:

1) $\hat{D}$ i $\hat{D}_1 = \{w: -w \in \hat{D}\}$ nie przecinają się,

2) $\hat{D} \subset U$.

ad 1. Załóżmy, że tak nie jest, wówczas $\hat{D}$ i $\hat{D}_1$ musiałyby mieć punkty wspólne dowolnie blisko swoich brzegów. Istniałyby zatem dwa punkty w_1, $w_2 \in \Delta \cap D$ takie, że $\hat{w}(w_1) + \hat{w}(w_2) = 0$. Wówczas

$$w_1 + w_2 = \hat{w}(w_1)e^{-\varepsilon\Phi(w_1)} + \hat{w}(w_2)e^{-\varepsilon\Phi(w_2)} = w_1\left[1 - e^{\varepsilon(\Phi(w_1)-\Phi(w_2))}\right].$$

Korzystając z własności c), funkcji Φ i postaci Ψ, uzyskujemy

$$|w_1 + w_2| < |w_1| \cdot \left|\varepsilon(w_1 + w_2)\frac{1}{w_1}\left[\Psi(-w_2, w_1) - \Phi(-w_2)\right]\right| e^{\varepsilon|\Phi(w_1)-\Phi(w_2)|}.$$

Ale $w_1 + w_2 \neq 0$, zatem

$$1 < \varepsilon\left|\Psi(-w_2, w_1) - \Phi(w_2)\right| e^{\varepsilon|\Phi(w_1)-\Phi(w_2)|},$$

co przy ε dostatecznie bliskich 0, na mocy ograniczoności funkcji Ψ i Φ, prowadzi do sprzeczności.

ad 2. Wystarczy pokazać, że $\hat{D}$ i $\hat{D}_2 = \left\{w : \frac{1}{w} \in \hat{D}\right\}$ nie przecinają się.

Przypuśćmy, że tak nie jest, wówczas istniałyby w D takie punkty w_1 i w_2, że

$$\hat{w}(w_1) \cdot \overline{\hat{w}(w_2)} = w_1 e^{\varepsilon\Phi(w_1)} \bar{w}_2 e^{\overline{\varepsilon\Phi(w_2)}} = 1,$$

a, po wydzieleniu przez $\bar{w}_2$,

$$w_1 e^{\varepsilon(\Phi(w_1) + \overline{\Phi(w_2)})} = \frac{1}{\bar{w}_2}.$$

Wykorzystując własność d) funkcji Φ powyższe równanie przybiera postać

$$w_1 e^{\varepsilon(\Phi(w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2}))} = \frac{1}{\bar{w}_2},$$

czyli

$$w_1 \left[1 - e^{\varepsilon(\Phi(w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2}))}\right] = w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\left|w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}\right| < |w_1| \cdot \left|\varepsilon(w_1 - \frac{1}{\bar{w}_2}) \frac{1}{w_1}\left[\Psi(\frac{1}{\bar{w}_2}, w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2})\right]\right| e^{\varepsilon\left|\Phi(w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2})\right|}.$$

Ponieważ $D \subset U$, czyli $w_1 \bar{w}_2 \neq 1$, zatem

$$1 < \varepsilon\left|\Psi(\frac{1}{\bar{w}_2}, w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2})\right| e^{\varepsilon\left|\Phi(w_1) - \Phi(\frac{1}{\bar{w}_2})\right|},$$

co jest niemożliwe dla dowolnego ε.

2. Obecnie wyprowadzimy wzory wariacyjne funkcji klasy G_1 zdefiniowanej w dalszym ciągu w oparciu o metodę wariacyjną zastosowaną przez Hummela i Schiffera w [2] do funkcji Bieberbacha - Eilenberga.

Definicja 2

Funkcję f jednolistną w U oraz spełniającą warunki:

(i) $f(z_1) \neq -f(z_2)$ dla każdych z_1, z_2 należących do U,

(ii) $|f(z)| < 1$

nazywamy ograniczoną funkcją Gelfera.

Oznaczmy przez G_1 rodzinę ograniczonych funkcji Gelfera. Rodzina ta jest normalna, a staje się zwarta po dołączeniu wszystkich funkcji stałych $f(z) = c$, $|c| < 1$.

Niech $f \in G_1$ i D jest równe $f(U)$. D jest oczywiście ograniczonym obszarem Gelfera, $\hat{D}$ obszarem otrzymanym z D w opisany powyżej sposób przy pomocy odwzorowania

$$\hat{w}(w) = w\, e^{\varepsilon\Phi(w)} = w + \varepsilon w\,\Phi(w) + o(\varepsilon),$$

gdzie $\Phi(w)$ jest postaci

$$\Phi(w) = e^{i\alpha}\left(\frac{1}{w-w_0} - \frac{1}{w+w_0}\right) - e^{-i\alpha}\left(\frac{w}{1-\overline{w}_0 w} - \frac{w}{1+\overline{w}_0 w}\right), \quad w_0 \notin \Delta, \qquad \Delta \text{ jak w tw. 1.}$$

Ponieważ funkcja $\Phi(w)$ spełnia założenia tw. 1, zatem $\hat{D}$ jest ograniczonym obszarem Gelfera. Rozpatrzmy obecnie złożenie

$$F(z) = \hat{w}(f(z)) = f(z) + \varepsilon f(z)\,\Phi(f(z)) + o(\varepsilon) = f(z) + \varepsilon q(z) + o(\varepsilon), \tag{1}$$

gdzie $z \in P = \{z : r < |z| < 1\}$, przy czym $f(P) \subset \Delta$. Funkcja $F(z)$ jest jednolistna w pierścieniu P dla ε dostatecznie bliskich zera, a więc na mocy twierdzenia Gołuzina [1] str. 99, wariacja funkcji f przyjmuje postać

$$\hat{f}(z) = f(z) + \varepsilon q(z) - \varepsilon z\, f'(z)\cdot S(z) + z\, f'(z)\cdot \overline{S\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + o(\varepsilon), \tag{2}$$

gdzie $S(z)$ jest częścią główną rozwinięcia w szereg Laurenta o środku w 0 funkcji $q(z)/z f'(z)$ w pierścieniu P. Rozpatrzmy dwa przypadki.

α) Niech $w_0 = f(z_0) \in D$. Wówczas

$$\frac{q(z)}{zf'(z)} = \frac{f(z)}{zf'(z)}\left[\frac{e^{i\alpha}}{f(z)-f(z_0)} - \frac{e^{i\alpha}}{f(z)+f(z_0)} - \frac{e^{-i\alpha} f(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} + \frac{e^{i\alpha} f(z)}{1+\overline{f(z_0)}f(z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{z}\left\{\frac{f(z)\, e^{i\alpha}}{f(z)}\left[\frac{1}{f(z)-f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)(z-z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)z_0} - \frac{1}{f(z)+f(z_0)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{f^2(z)e^{-i\alpha}}{f'(z)}\left[-\frac{1}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} + \frac{1}{1+\overline{f(z_0)}f(z)}\right]\right\} + \frac{1}{z-z_0}\;\frac{f(z)e^{i\alpha}}{f'(z_0)f'(z)z_0}.$$

Zatem

$$S(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{f(0)\,e^{i\alpha}}{f'(0)}\left(\frac{1}{f(0)-f(z_0)} - \frac{1}{f(0)+f(z_0)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{f^2(0)e^{-i\alpha}}{f'(0)}\left(\frac{1}{1+\overline{f(z_0)}f(0)} - \frac{1}{1-\overline{f(z_0)}f(0)}\right)\right] + \frac{1}{z-z_0}\,\frac{f(z_0)\,e^{i\alpha}}{z_0(f'(z_0))^2},$$

(2) przyjmuje więc postać

$$\hat{f}(z) = f(z) + \varepsilon\left[\frac{2e^{i\alpha}f(z)f(z_0)}{f^2(z)-f^2(z_0)} - \frac{2e^{-i\alpha}\overline{f(z_0)}f^3(z)}{1-\overline{f^2(z_0)}f^2(z)} - \frac{2f(0)f(z_0)f'(z)e^{i\alpha}}{f'(0)(\overline{f^2(0)}-\overline{f^2(z_0)})} + \right.$$

$$+ \frac{2f^3(0)\overline{f(z_0)}f'(z)e^{-i\alpha}}{f'(0)(1-\overline{f^2(z_0)}f^2(0))} - \frac{f'(z)f(z_0)e^{i\alpha}}{(f'(z_0)z_0)^2}\,\frac{z_0 z}{z-z_0} + \frac{2\overline{f(0)}\overline{f(z_0)}z^2f'(z)e^{-i\alpha}}{\overline{f'(0)}(\overline{f^2(0)}-\overline{f^2(z_0)})} -$$

$$\left. - \frac{2f(z_0)\overline{f^3(0)}z^2f'(z)e^{i\alpha}}{\overline{f'(0)}(1-f^2(z_0)\overline{f^2(0)})} + \frac{\overline{f(z_0)}f'(z)e^{-i\alpha}}{(\overline{f'(z_0)z_0})^2}\,\frac{\bar{z}_0 z^2}{1-\bar{z}_0 z}\right] + o(\varepsilon). \tag{3}$$

β) Niech punkty w_0, $-w_0$, $\frac{1}{\overline{w}_0}$, $-\frac{1}{\overline{w}_0} \notin \overline{D}$. Wtedy wariacją funkcji $f \in G_1$ jest przedłużenie funkcji (1) na U, czyli

$$\hat{f}(z) = f(z) + \varepsilon\left[\frac{2w_0 f(z)e^{i\alpha}}{f^2(z)-w_0^2} - \frac{2\overline{w}_0 f^3(z)e^{-i\alpha}}{1-f^2(z)\overline{w}_0^2}\right] + o(\varepsilon). \tag{4}$$

Rozpatrzmy jeszcze następujące proste wariacje $\hat{f}$ funkcji $f \in G_1$:

γ) dla $\varepsilon > 0$

$$f(z) = f(e^{\pm i\varepsilon} z) = f(z) \pm i\varepsilon\, z\, f'(z) + o(\varepsilon), \tag{5}$$

δ) dla $0 < \varepsilon < 1$ i $\theta \in R$

$$\hat{f}(z) = f\left(\frac{z+\varepsilon e^{i\theta}}{1+\varepsilon e^{-i\theta} z}\right) = f(z) + \varepsilon\left[e^{i\theta}f'(z) - e^{-i\theta}z^2f'(z)\right] + o(\varepsilon), \tag{6}$$

ε) dla $|\eta| = 1$ i $\varepsilon > 0$

$$\hat{f}(z) = f\left[k^{-1}\left((1-\varepsilon)k(z)\right)\right] = f(z) - \varepsilon z f'(z)\,\frac{1+\eta z}{1-\eta z} + o(\varepsilon), \tag{7}$$

gdzie $k(z) = \dfrac{z}{(1+\eta z)^2}$.

3. Niech $\Lambda(f)$ będzie rzeczywistym funkcjonałem określonym i ciągłym na G_1, $H(U)$ przestrzenią funkcji holomorficznych w U z topologią niemal jednostajnej zbieżności. Mówimy, że Λ posiada zespoloną różniczkę w sensie Gâteaux, jeśli istnieje funkcjonał $L_f \in H'(U)$ taki, że $\Lambda(\hat{f}) = \Lambda(f) + \varepsilon \operatorname{Re} L_f(h) + o(\varepsilon)$, gdy $\hat{f}(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon)$ jest funkcją z klasy G_1 dla $h(z) \in H(U)$ i $\varepsilon > 0$.

W oparciu o wzory wariacyjne $\alpha) - \varepsilon)$ uzyskamy pewne własności funkcji ekstremalnych dla problemu $\max\limits_{G_1} \Lambda$. W tym celu załóżmy, że dla $f \in G_1$ $\max\limits_{G_1} \Lambda = \Lambda(f)$. Jeśli funkcja $\hat{f} \in G_1$ jest postaci $\hat{f}(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon)$, wtedy

$$\Lambda(\hat{f}) = \Lambda(f) + \varepsilon \operatorname{Re} L_f(h) + o(\varepsilon) \leq \Lambda(f),$$

czyli

$$\varepsilon \operatorname{Re} L_f(h) + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Stąd dzieląc stronami przez ε i zmierzająo z ε do zera otrzymujemy

$$\operatorname{Re} L_f(h) \leq 0. \tag{8}$$

Dla wariacji (5) nierówność (8) przyjmuje postać

$$\operatorname{Re} L_f[\pm i z f'(z)] \leq 0,$$

czyli

$$\operatorname{Im} L_f [z f'(z)] = 0. \tag{9}$$

Analogicznie dla (6) nierówność (8) ma postać

$$\operatorname{Re} L_f\left[e^{i\Theta} f'(z) - e^{-i\Theta} z^2 f'(z)\right] = \operatorname{Re} \left\{e^{i\Theta} \left[L_f(f'(z)) - \overline{L_f(z^2 f'(z))}\right]\right\} \leq 0.$$

Stąd wobec dowolności Θ otrzymujemy

$$L_f[f'(z)] = \overline{L_f[z^2 f'(z)]}. \tag{10}$$

Wreszcie dla (7) z nierówności (8) mamy

$$\operatorname{Re} L_f\left[z f'(z) \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\right] \geq 0 \quad \text{dla dowolnego } \eta = e^{it},\ t \in R \tag{11}$$

Obecnie wyprowadzimy równanie typu równania Schiffera w klasie G_1. Dla wariacji (3) z nierówności (8) uzyskujemy dla funkcji ekstremalnej

$$\operatorname{Re} L_f\left\{e^{i\alpha}\left[\frac{2f(z_o)f(z)}{f^2(z)-f^2(z_o)} - \frac{2f(o)f(z_o)f'(z)}{f'(o)(f^2(o)-f^2(z_o))} - \frac{f(z_o)f'(z)}{(z_of'(z_o))^2}\,\frac{zz_o}{z-z_o} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2f(z_o)\overline{f^3(o)}\,f'(z)z^2}{\overline{f'(o)}(1-f^2(z_o)\overline{f^2(o)})}\right] + e^{-i\alpha}\left[-\frac{2\,\overline{f(z_o)}f^3(z)}{1-\overline{f^2(z_o)}f^2(z)} + \frac{2\overline{f(z_o)}f^3(o)f'(z)}{f'(o)(1-\overline{f^2(z_o)}f^2(o))} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\overline{f(o)}\,\overline{f(z_o)}f'(z)z^2}{\overline{f'(o)}(\overline{f^2(o)}-\overline{f^2(z_o)})} + \frac{\overline{f(z_o)}f'(z)}{(\overline{f'(z_o)}\bar{z}_o)^2}\,\frac{\bar{z}_oz^2}{1-\bar{z}_oz}\right]\right\} < 0.$$

Stąd, dzięki dowolności α, wykorzystując równość (10), otrzymujemy

$$\left(\frac{z_of'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2\left[L_f\left(\frac{2f^2(z_o)f(z)}{f^2(z)-f^2(z_o)}\right) - \overline{L_f\left(\frac{2\overline{f^2(z_o)}f^3(z)}{1-\overline{f^2(z_o)}f^2(z)}\right)}\right] =$$

$$= L_f\left(z\,f'(z)\,\frac{z_o}{z-z_o}\right) - \overline{L_f\left(z\,f'(z)\,\frac{z\bar{z}_o}{1-\bar{z}_oz}\right)}\,. \tag{12}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$D(w) = L_f\left(\frac{wf}{f-w}\right), \qquad E(\zeta) = L_f\left(\frac{\zeta zf'(z)}{z-\zeta}\right),$$

$$A(w) = D(w) + D(-w) + 2\,\overline{L_f(f)} + \overline{D\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)} + \overline{D\left(-\frac{1}{\bar{w}}\right)},$$

$$B(\zeta) = E(\zeta) + \overline{L_f(z\,f'(z))} + \overline{E\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}.$$

Ponieważ

$$-\frac{\bar{w}\,f^2}{1-\bar{w}f} = f + \frac{f}{\bar{w}\left(f-\frac{1}{\bar{w}}\right)},$$

$$-\frac{\bar{\zeta}z^2f'(z)}{1-\bar{\zeta}z} = z\,f'(z) + \frac{zf'(z)}{\bar{\zeta}\left(z-\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)},$$

zatem słuszne jest

Twierdzenie 2

Niech $f \in G_1$, Λ jest rzeczywistym funkcjonałem określonym i ciągłym na G_1 z pochodną zespoloną L_f, oraz $\Lambda f = \max_{G_1} \Lambda$. Wtedy funkcja f spełnia równanie

$$\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \cdot A(f(\zeta)) = B(\zeta) \quad \text{dla} \quad |\zeta|<1 \tag{13}$$

i $B(\zeta) \leq 0$ dla $|\zeta| = 1$.

Dowód

Pierwszą część tezy otrzymujemy bezpośrednio z równania (12) kładąc $z_0 = \zeta$.

Dla dowodu drugiej części tezy zauważmy, że funkcja f spełnia nierówność (11), zatem

$$0 < \operatorname{Re} L_f\left[z f'(z) \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\right] = \operatorname{Re} L_f(z f'(z) + \operatorname{Re} L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right].$$

Korzystając z (9) uzyskujemy

$$L_f(z f'(z)) + L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right] + \overline{L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right]} > 0,$$

a z liniowości L_f

$$L_f\left[z f'(z) \frac{1}{1-\eta z}\right] + \overline{L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right]} > 0 \quad \text{gdy } |\eta| = 1.$$

Dalej dla $\zeta = \bar{\eta} = e^{it}$, $t \in R$, mamy

$$B(\eta) = L_f\left[z f'(z) \frac{\bar{\eta}}{z-\eta}\right] - \overline{L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right]} =$$

$$= L_f\left[z f'(z) \frac{1}{\eta z-1}\right] - \overline{L_f\left[z f'(z) \frac{\eta z}{1-\eta z}\right]} < 0,$$

co kończy dowód.

4. Metody wariacyjne pozwalają otrzymać pewne informacje o ekstremalnych obszarach Gelfera, gdzie przez obszar ekstremalny rozumiemy obraz $f(U)$ poprzez funkcję ekstremalną f. Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie 3

Załóżmy, że $f \in G_1$, Λ jest rzeczywistym funkcjonałem określonym i ciągłym na G_1 z pochodną zespoloną L_f, $\Lambda f = \max \Lambda$, $\frac{A(w)}{w}$ jest funkcją meromorficzną i $\frac{A(w)}{w} \not\equiv 0$ dla $w \in C - f(U)$. Jeśli punkty w_0, $-w_0$, $\frac{1}{w_0}$, $-\frac{1}{w_0}$ nie leżą w $D = f(U)$, wtedy co najmniej jeden z nich leży na brzegu D.

Dowód

Jeśli punkty w_0, $-w_0$, $\frac{1}{\overline{w}_0}$, $-\frac{1}{\overline{w}_0}$ leżałyby na zewnątrz $\overline{D}$, to tworząc dla funkcji f wariację (4) z nierówności (8) otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}\left[L_f\left(\frac{2w_0\, f(z)}{f^2(z)-w_0^2}\right) - \overline{L_f\left(\frac{2\overline{w}_0\, f^3(z)}{1-f^2(z)\overline{w}_0^2}\right)}\right]\right\} \leq 0.$$

Stąd wobec dowolności α $\frac{A(w_0)}{w_0} = 0$, ale wówczas warunek ten zachodzi w pewnym otoczeniu punktu w_0, co na skutek meromorficzności $\frac{A(w)}{w}$ daje sprzeczność.

Wniosek

Przy założeniach tw. 3 jeśli punkty w_0, $-w_0$ nie należą do f(U) i $|w_0|<1$, wtedy co najmniej jeden z nich leży na brzegu D = f(U). Ponadto co najmniej jeden z punktów 1 i -1 leży na brzegu D.

LITERATURA

[1] Gołuzin G.M.: Geometriczeskaja teorija funkcij kompleksnowo pieriemiennowo, Nauka, Moskwa 1966.

[2] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational methods for Bieberbach - Eilenberg functions and for pairs, Ann.Acad.Sci.Fennicae, Ser. A.1. Mathematica, 3, (1977) 3-42.

ВАРЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГЕЛЬФЕРА

Р е з ю м е

В раьоте даны вариационные формулы для ограниченных функций Гельфера. Используя эти формулы выведено дифференционольное уравнение типа уравнения Шиффера для экстремальных функций, также некоторые свойства экстремальных областей.

VARIATIONAL METHODS FOR GELFER BOUNDED FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper have been given variational formulas for Gelfer's bounded functions. Using these formulas have been obrained differential equation of Schiffer type for extremal functions and some properties of the extremal domains.