ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Krystyna MIŚTA

PARY WEWNĘTRZNE AHARONOVA

Streszczenie. W pracy rozważa się pewien układ równań funkcyjnych o dwóch funkcjach niewiadomych postaci (3), gdzie funkcja $\Omega(w)$ jest funkcją wymierną o jedynych biegunach w 0 i ∞ tego samego stopnia N, funkcja $\chi_1(z)$ i $\chi_2(z)$ są funkcjami wymiernymi o jedynych biegunach w 0 i ∞, również tego samego stopnia N oraz czysto urojonymi na okręgu. Ponadto $\operatorname{Re} C_1 = \operatorname{Re} C_2$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Udowodniono (twierdzenie 1), że każda para spełniająca ten układ równań jest parą Aharonova, mającą pewne dodatkowe własności. Parę Aharonova spełniającą układ (3) nazywamy parą wewnętrzną. Udowodniono również (twierdzenie 2), że zbiór par wewnętrznych jest gęsty w zbiorze wszystkich par Aharonova.

I. Niech f i g będą funkcjami holomorficznymi i jednolistnymi w kole jednostkowym $U = \{z: |z| < 1\}$ postaci

$$f(z) = b_{1f}(z + a_{2f}z^2 + \ldots), \quad g(z) = b_{1g}(1 + a_{2g}z^2 + \ldots) \tag{1}$$

takimi, że

$$f(z)\, g(\zeta) \neq 1 \quad \text{dla dowolnych } z, \zeta \in U. \tag{2}$$

Funkcje f i $h = \frac{1}{g}$ nazywamy funkcjami o rozłącznych zbiorach wartości, ponieważ na mocy (2) $f(U) \cap h(U) = \phi$. Parę (f,g) nazywamy parą Aharonova, a rodzinę takich par oznaczamy przez A.

Weźmy dalej pod uwagę układ równań

$$\begin{aligned} \lambda \log w_1 + \Omega(w_1) + C_1 &= \chi_1(z) + \lambda \log z \\ -\lambda \log w_2 + \Omega\left(\frac{1}{w_2}\right) + C_2 &= \chi_2(z) + \lambda \log z, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie funkcja $\Omega(w)$ jest funkcją wymierną o jedynych biegunach w 0 i ∞ tego samego stopnia N, funkcje $\chi_1(z)$ i $\chi_2(z)$ są funkcjami wymiernymi o jedynych biegunach w 0 i ∞, również tego samego stopnia N oraz czysto urojonymi na okręgu. Ponadto $\operatorname{Re} C_1 = \operatorname{Re} C_2$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Układ tej postaci pojawia się przy poszukiwaniu ekstremum funkcjonału Grunsky'ego - Nehariego w rodzinie A, który badany był w pracy [2].

Parę (f,g) funkcji postaci $f(z) = b_{1f}z + \dots$, $g(z) = b_{1g}z + \dots$ holomorficznych w kole jednostkowym U będziemy nazywać parą wewnętrzną, jeśli układ funkcji $w_1 = f(z)$, $w_2 = g(z)$ spełnia równania (3), tj.

$$\begin{aligned} \lambda\log f(z) + \Omega(f(z)) + C_1 &= \chi_1(z) + \lambda\log z \\ -\lambda\log g(z) + \Omega\left(\frac{1}{g(z)}\right) + C_2 &= \chi_2(z) + \lambda\log z \end{aligned} \tag{4}$$

w U.

II. Udowodnimy obecnie następujące twierdzenie

Twierdzenie 1

Jeśli (f,g) jest opisaną powyżej parą wewnętrzną to:

1. f i g przedłużają się jako funkcje skończone i ciągłe na koło jednostkowe domknięte.
2. Funkcje f i $\frac{1}{g}$ przekształcają U na obszary G_1 i G_2 takie, że zbiór $\mathbb{C}\setminus(G_1 \cup G_2)$ nie ma punktów wewnętrznych i $G_1 \cap G_2 = \Phi$.
3. f i g są jednolistne w U.
4. Brzegi ∂G_1 i ∂G_2 pokrywają się z obrazami okręgu U poprzez odwzorowanie f i $\frac{1}{g}$. Brzegi te składają się z punktów, w których $\mathrm{Re}\left\{\lambda\log w + \Omega(w)\right\}$ jest równy stałej.

Dowód

Dowód będzie się składał z czterech części odpowiadających poszczególnym własnościom.

ad 1. W celu udowodnienia pierwszej własności wystarczy wykazać, że dla każdego ciągu punktów $\{z_j\}$, $z_j \to z_o$, $|z_j| < 1$, $|z_o| = 1$, ciąg $\{f(z_j)\} \to w_o$, zależnego tylko od z_o. Weźmy pod uwagę równanie

$$\lambda\log w + \Omega(w) + C_1 = \chi_1(z_o) + \lambda\log z_o. \tag{5}$$

Niech dalej w_h będą różnymi pierwiastkami równania (5). Wykażemy, że liczba rozwiązań równania (5) jest skończona. Przypuśćmy bowiem, że jest przeciwnie i niech ciąg $\{w_h\}$ będzie ciągiem rozwiązań powyższego równania. Jedynymi punktami skupienia ciągu w_h mogą być 0 lub ∞. Pomnóżmy dalej obie strony równania (5) przez w^N, gdzie N- jest najwyższą potęgą, w której występuje w w $\Omega(w)$. Przechodząc do granicy w zerze, dochodzimy do wniosku, że współczynnik przy w^{-N} dla funkcji $\Omega(w)$ musi być zerem, co jest niemożliwe. Analogicznie można wykazać, że ∞ nie jest punktem skupienia ciągu $\{w_h\}$, więc ilość rozwiązań równania (5) jest skończona; oznaczmy ją przez R.

Wybierzmy dalej liczbę dodatnią ε, tak aby wszystkie koła $K(w_h,\varepsilon)$ $h=1,\dots R$, wzięte wraz z okręgami, były rozłączne. Niech U_o będzie takim otoczeniem punktu z_o, by dla dowolnego $z \in U_o \cap U$ wszystkie pierwiastki równania

$$\lambda\log w + \Omega(w) + C_1 = \chi_1(z) + \chi\log z \tag{6}$$

należały do zbioru $S = \bigcup_h K(w_h, \varepsilon)$. Ale dla każdego $z \in U_0 \cap U$ liczby $f(z)$ są pierwiastkami równania (6). Z drugiej strony $f(U_0 \cap U)$ jest zbiorem spójnym, zatem istnieje h_0 takie, że $f(U_0 \cap U) \subset K(w_{h_0}, \varepsilon)$.
Jeśli zatem $z_j \in U_0 \cap U$ to

$$f(z_j) \in K(w_{h_0}, \varepsilon). \tag{7}$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ i warunku (7) wynika, że $f(z_j) \to w_{h_0}$, a więc w_{h_0} nie zależy od ε, przeto zależy tylko od z_0. Kładąc zatem $w_0 = w_{h_0}$, otrzymujemy, że ciąg $f(z_j) \to w_0$, co kończy dowód własności 1.

ad 2. Niech $\Gamma_1 = f(U)$ i $\Gamma_2 = h(U)$, gdzie $h(z) = \frac{1}{g(z)}$. Widać, że Γ_1 i Γ_2 są zbiorami domkniętymi i ograniczonymi. Ponadto z (4) wynika, że $\lambda\log w + \Omega(w) + C_1$ i $\lambda\log w + \Omega(w) + C_2$ są urojone na Γ_1 i Γ_2 oraz Γ_1 i Γ_2 nie zawierają 0 i ∞, ponieważ $\chi_1(z) + \lambda\log z$ i $\chi_2(z) - \lambda\log z$ są ograniczone na ∂U, a $\lambda\log w + \Omega(w)$ staje się w 0 i ∞ nieskończone. Widać również natychmiast, że $\partial G_1 \subset \Gamma_1$ i $\partial G_2 \subset \Gamma_2$, ponieważ $f(z)$ i $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ są meromorficzne w U. W ten sposób ∂G_1 i ∂G_2 są zbiorami ograniczonymi, do których 0 nie należy. Z ograniczoności G_1 i holomorficzności $f(z)$ wynika, że obszar G_1 jest obszarem ograniczonym: obszar G_2 jest oczywiście nieograniczony, ponieważ zawiera ∞.

Można dalej wykazać, że kontinua Γ_1 i Γ_2 nie rozcinają odpowiednio obszarów G_1 i G_2. Przypuśćmy najpierw, że Γ_1 rozcina obszar G_1, tzn., że $G_1 \setminus \Gamma_1$ nie jest spójny. W takim razie obok składowej S_0, zawierającej punkt 0, istniałaby druga składowa S, która jest ograniczona jako podzbiór zbioru ograniczonego G_1. Brzeg tej składowej jest oczywiście zawarty w $\partial G_1 \cup \Gamma_1$, a więc w Γ_1. Zgodnie z poprzednim funkcja $\lambda\log w + \Omega(w) + C_1$ miałaby na brzegu obszaru S część rzeczywistą równą zeru, co jest niemożliwe, ponieważ każda gałąź tej funkcji jest holomorficzna w S (S nie zawiera ani 0 ani ∞) i funkcja ta nie jest stałą. Analogicznie można wykazać, że Γ_2 nie rozcina G_2. Zauważmy najpierw, że $0 \notin G_2$, bo $h(z) = \frac{1}{g(z)} \neq 0$. Gdyby Γ_2 rozcinało G_2, to oprócz składowej nieograniczonej S_0, $\infty \in S_0$, istniałaby jeszcze składowa S taka, że $0, \infty \notin S$, co jest niemożliwe z tego samego powodu co wyżej.

Wykażemy z kolei, że $C \setminus (G_1 \cup G_2)$ nie ma punktów wewnętrznych. Przypuśćmy przeciwnie, że $C \setminus (G_1 \cup G_2)$ zawiera punkty wewnętrzne. Wówczas $\overline{C \setminus (\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2)} = C \setminus (\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2)$ jest, jak łatwo zauważyć, zbiorem niepustym, otwartym i ograniczonym, nie zawierającym 0. Ponadto brzeg tego zbioru należy do $\partial G_1 \cup \partial G_2$, a tym bardziej do $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Badając część rzeczywistą funkcji $\lambda\log w + \Omega(w)$, podobnie jak poprzednio dochodzimy do sprzeczności.

Chcąc zakończyć dowód części drugiej, musimy jeszcze wykazać, że $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Załóżmy, że tak nie jest, tzn. $G = G_1 \cap G_2 \neq 0$. Zbiór G jest oczywiście zbiorem otwartym, nie zawierającym 0 i ∞ i brzeg tego zbioru jest zawarty w $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. I tu dochodzimy do sprzeczności, tak samo jak wyżej.

ad 3*). Niech Z_1 oznacza zbiór skończony wszystkich punktów z koła U, dla których $z = 0$, bądź $\frac{\lambda}{z} + \chi_1'(z) = 0$ oraz W_1 - zbiór skończony wszystkich punktów w, dla których $w = 0$, bądź $\frac{\lambda}{w} + \Omega'(w) = 0$, bądź istnieje $z \in Z$ takie, że $\lambda \log w + \Omega(w) + C_1 = \chi_1'(z) + \lambda \log z$. Ilość tych ostatnich jest oczywiście także skończona. $G_1 \setminus \Gamma_1$ jest obszarem, więc $G_1 \setminus (\Gamma_1 \cup W_1)$ jest też obszarem. Niech μ oznacza dowolny łuk ciągły o równaniu

$$w = w(t), \quad 0 < t < 1, \tag{8}$$

wychodzący z pewnego punktu $w_0 \in G_1 \setminus (\Gamma_1 \cup W_1)$, leżący całkowicie, za wyjątkiem ewentualnie końca, w $G_1 \setminus (\Gamma_1 \cup W_1)$. Niech dalej $z_0 \in U$ takie, że $f(z_0) = w_0$. Wykażemy, że istnieje jeden łuk ciągły λ o równaniu

$$z = z(t), \quad 0 < t < 1, \tag{9}$$

wychodzący z punktu z_0 i leżący w $U \setminus Z_1$, taki, że μ jest obrazem λ poprzez przekształcenie $f(z)$, tzn.

$$w(t) = f(z(t)), \quad 0 < t < 1. \tag{10}$$

W tym celu rozważmy klasę przedziałów $\langle 0,b \rangle$ zawartych w przedziale $\langle 0,1 \rangle$, dla których istnieje i tylko jedna funkcja ciągła typu (9), spełniająca w tym przedziale zależność (10). Klasa ta nie jest pusta, ponieważ przedział $\langle 0,0 \rangle$ należy do niej. Widać ponadto, że łuk (9) nie ma punktów wspólnych ani z ∂U, ani z Z_1, ponieważ łuk (8) nie ma punktów wspólnych ani z Γ_1, ani z W_1.

Niech dalej przedział $\langle 0, \beta \}$ oznacza sumę przedziałów wyżej opisanej klasy. Nawias $\}$ oznacza, że przedział ten może być zarówno prawostronnie otwarty jak prawostronnie domknięty. Zauważmy przede wszystkim, że w przedziale $\langle 0, \beta \}$ istnieje dokładnie jeden łuk ciągły (9), który spełnia w tym przedziale warunek (10). Wystarczy bowiem wziąć dla każdego t wartość wspólną wszystkim funkcjom (9), rozważanej klasy. Zauważmy dalej, że $\beta = 1$.

*) Dowód jednolistności jest wzorowany na analogicznym dowodzie z pracy: Z. Charzyński, J. Śladkowska "Application de la méthode des fonctions algébriques á la représentation conforme" (praca ukaże się w Dissertationes Mathematicae).

W tym celu wykażemy, że gdyby $\beta<1$, wówczas istniałby przedział $\langle 0,\beta^*\rangle$, opisanej powyżej klasy, szerszy od przedziału $\langle 0,\beta\rangle$. Rzeczywiście załóżmy, że $\beta<1$ i obierzmy ciąg parametrów $\{t_n\}$ zbieżny od lewej strony do β oraz odpowiadający mu ciąg $\{z(t_n)\}$. Wybierając ewentualnie podciągi można założyć, że ostatni ciąg jest zbieżny do pewnej granicy ζ znajdującej się w U. Równocześnie ciąg $\{w(t_n)\}$ dąży do $\omega = w(\beta)$, ponadto zgodnie z (10) oraz z możliwości rozszerzenia ciągłego funkcji $f(z)$ na koło domknięte zachodzi

$$\omega = f(\zeta) \tag{11}$$

i w rezultacie $\lambda\log\omega+\Omega(\omega)+C_1=\lambda\log\zeta+\chi_1(\zeta)$. Z tego, że $\beta<1$ oraz z założeń uczynionych odnośnie μ wynika, że punkt ω nie należy ani do Γ_1, ani do W_1, więc w szczególności nie jest żadnym z pierwiastków $\frac{\lambda}{w}+\Omega'(w)$. Wnioskujemy stąd na mocy (10) i (11), że ζ nie należy ani do ∂U, ani do Z_1, więc należy do U i jest różny od 0 oraz nie jest żadnym z pierwiastków $\frac{\lambda}{z}+\chi_1'(z)$. Dochodzimy więc do wniosku, że funkcja $f(z)$ posiada w punkcie ζ pochodną różną od zera. Oznaczając tę funkcję w pewnym małym otoczeniu punktu ζ przez $f_o(z)$ widzimy, że w obrazie tego otoczenia, zawierającym we wnętrzu punkt ω, istnieje funkcja $f_o^{-1}(w)$ odwrotna do $f_o(z)$. Stąd natychmiast wnioskujemy, że w pewnym małym otoczeniu punktu β istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła

$$\hat{z}(t),\quad \beta-h<t<\beta+h, \tag{12}$$

spełniająca warunek

$$w(t) = f(\hat{z}(t)) \tag{13}$$

i warunek początkowy

$$\hat{z}(\beta) = \zeta, \tag{14}$$

określona związkiem $\hat{z}(t) = f_o^{-1}(w(t))$. Jednocześnie dla n dostatecznie dużych zachodzi $\hat{z}(t_n) = f_o^{-1}(w(t_n))$, $t_n>\beta-h$ i w rezultacie $\hat{z}(t_n)=z(t_n)$. Zdefiniujmy dla takich n łuk

$$z^*(t) = \begin{cases} z(t) & \text{dla } 0<t<t_n, \\ \hat{z}(t) & \text{dla } t_n<t<\beta^*=\beta+h. \end{cases} \tag{15}$$

Łuk ten jest łukiem ciągłym, spełniony jest warunek $w(t) = f(z^*(t))$, $0<t<\beta^*$ i ze względu na definicję μ, łuk ten leży całkowicie w $U\setminus Z_1$. Ponadto jest on jedynym łukiem ciągłym spełniającym w tym przedziale warunek (10). Istotnie niech

$$z^{**}(t), \quad 0 < t < \beta^* \tag{16}$$

będzie łukiem ciągłym spełniającym warunek $w(t) = f(z^{**}(t))$, $0 < t < \beta^*$. Z założenia o jednoznaczność funkcji (9) otrzymujemy w przedziale $\langle 0, \beta)$ związek $z^{**}(t) = z^*(t) = z(t)$, $t \in \langle 0, \beta)$ i w rezultacie, zgodnie z definicją ζ, $z^{**}(\beta) = \zeta$. Z tego i jednoznaczności funkcji ciągłej (12) spełniającej (13) i (14) w $\langle \beta - h, \beta + h\rangle$ wynika, że $z^{**}(t) = \hat{z}(t) = z^*(t)$ w $\langle \beta - h, \beta + h\rangle$, więc funkcja (16) jest identyczna z funkcją (15). Udowodniliśmy tym samym, że w przedziale $\langle 0, \beta^*\rangle$ istniałby łuk λ, opisanego wyżej typu, co prowadzi do sprzeczności z definicją β. Dochodzimy zatem do wniosku, że $\beta = 1$.

Zauważmy ponadto, że $\lambda \log w(t) + \Omega(w(t)) + C_1 = \lambda \log z(t) + \chi_1(z(t))$. Wynika stąd w szczególności, że jeżeli łuk μ kończy się w punkcie 0, czyli $w(t) \to 0$, gdy $t \to 1$, to $\lambda \log w(t) + \Omega(w(t)) + C_1 \to \infty$, a zatem $\lambda \log z(t) + \chi_1(z(t)) \to \infty$, więc $z(t) \to 0$, czyli λ kończy się także w punkcie 0.

Teraz już łatwo udowodnimy jednolistność funkcji $f(z)$. Przypuśćmy, że $f(z)$ nie jest jednolistna. Istniałyby wówczas dwa różne punkty z_0^*, z_0^{**} należące do U, których obrazem poprzez odwzorowanie $w = f(z)$ byłby ten sam punkt $w_0^* \in G_1$. Dokonując ewentualnie małego przesunięcia punktów w_0^*, z_0^*, z_0^{**}, można założyć, że $w_0^* \notin \Gamma_1 \cup W_1$ i $z_0^*, z_0^{**} \notin Z_1$. Z tego, że kontinuum Γ_1 nie rozcina obszaru G_1 wnioskujemy, że istnieje łuk ciągły μ, który wychodzi z punktu w_0^* i leży całkowicie w $G_1 \setminus (\Gamma_1 \cup W_1)$ z wyjątkiem końca, którym jest punkt $w = 0$. Z kolei, na mocy poprzedniego, łuk ten jest obrazem poprzez $w = f(z)$ dwóch analogicznych łuków λ_1 i λ_2, wychodzących odpowiednio z punktów z_0^* i z_0^{**}, które kończą się w punkcie $z = 0$ oraz za wyjątkiem tego punktu nie mają punktów wspólnych. Wówczas jednak punkt $w \in \mu$ dostatecznie bliski zera byłby obrazem poprzez $w = f(z)$ dwóch punktów $z_1 \in \lambda_1$ i $z_2 \in \lambda_2$ różnych i dowolnie bliskich zera, co jest sprzeczne z tym, że $f(z)$ posiada w otoczeniu zera funkcję odwrotną.

W analogiczny sposób można wykazać, że $g(z)$ jest jednolistna.

ad 4. Z poprzednich rozważań wiemy, że $\partial G_1 \subset \Gamma_1$ i $\partial G_2 \subset \Gamma_2$. Wystarczy więc wykazać, że i odwrotnie $\partial G_1 \supset \Gamma_1$ i $\partial G_2 \supset \Gamma_2$. Przypuśćmy najpierw, że $\Gamma_1 \not\subset \partial G_1$. Oczywiście $\Gamma_1 \subset \bar{G}_1$, a stąd zbiór Γ_1 miałby punkt wspólny w_0 z G_1. W takim razie istniałyby punkty $\zeta_0 \in \partial U$ i $z_0 \in U$ takie że $f(\zeta_0) = f(z_0) = w_0$, co jest niemożliwe, bo funkcja $f(z)$ jest jednolistna. Analogicznie można wykazać, że $\Gamma_2 \subset G_2$, co kończy dowód pierwszej części własności 4. Z poprzednich obserwacji wiemy, że $\lambda \log w + \Omega(w) + C_1$ i $\lambda \log w + \Omega(w) + C_2$ są czysto urojone odpowiednio na ∂G_1 i ∂G_2. Biorąc więc pod uwagę założenie $\operatorname{Re} C_1 = \operatorname{Re} C_2$, otrzymujemy drugą część własności 4.

Wykażemy obecnie, że przy pomocy wewnętrznych par Aharonova można aproksymować każdą parę ekstremalną, tzn. parę, dla której funkcjonał określony na A, ciągły i różniczkowalny w sensie Gâteaux, osiąga ekstremum. W tym celu udowodnimy następujący lemat.

Lemat 1

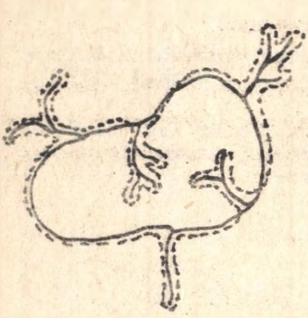
Każdą krzywą zamkniętą Jordana J można aproksymować w sensie Frécheta krzywą analityczną zamkniętą Jordana, na której pewna funkcja wymierna $\Omega(w)$ postaci

$$w = \frac{D_{-N}}{w^N} + \ldots + D_0 + \ldots + D_N w^N, \quad D_{-N} \neq 0, \quad D_N \neq 0, \tag{17}$$

jest czysto urojona.

Dowód

Weźmy pod uwagę obszar D ograniczony krzywą J i odwzorujmy go przy pomocy funkcji holomorficznej i jednolistnej $z = \varphi(w)$ na koło U. Funkcja ta przedłuża się na mocy twierdzenia Carathéodory'ego-Osgooda na obszar domknięty $\overline{D}$ jako funkcja ciągła i różnowartościowa. Niech $\varepsilon_n \to 0$. Na mocy twierdzenia Rungego istnieje ciąg wielomianów $\{P_n(w)\}$ taki, że $|\varphi(w) - P_n(w)| < \varepsilon_n$ dla każdego $w \in \overline{D}$. Dla n dostatecznie dużych wielomiany te są wielomianami jednolistnymi. Połóżmy $\overline{B}_n = P_n(\overline{D})$. Brzeg $\overline{B}_n$ leży w pierścieniu $1 - \varepsilon_n < |z| < 1 + \varepsilon_n$, a zatem $K(0,1-\varepsilon_n) \subset \overline{B}_n$. Kładąc $\Gamma_n = P_n^{-1}(K(0,1-\varepsilon_n))$, zauważamy, że Γ_n są zamkniętymi krzywymi analitycznymi Jordana i ponadto $\{\Gamma_n\}$ dąży w sensie Frécheta do J, ponieważ ciąg $P_n^{-1}((1-\varepsilon_n)e^{i\theta})$ dąży jednostajnie ze względu na θ do $\varphi^{-1}(e^{i\theta})$. Ponadto funkcja wymierna $\Omega_n(w) = i\, M_n P_n(w) + \frac{i\, M_n}{P_n(w)}$, gdzie $M_n = \frac{1}{1-\varepsilon_n}$, jest postaci (17) oraz odwzorowuje krzywą Γ_n na odcinek położony na osi urojonej, a tym samym Γ_n jest poszukiwaną krzywą.



Rys. 1

Wiadomo dalej (patrz [1], str. 17), że jeśli (f,g) są wspomnianą wyżej parą ekstremalną i $h = \frac{1}{g}$, to zbiór spójny $C \setminus (f(U) \cup h(U))$ składa się z krzywej analitycznej zamkniętej Jordana, zawierającej punkt $z = 0$ wewnątrz oraz ze skończonej ilości łuków analitycznych położonych zarówno wewnątrz tej krzywej jak i na zewnątrz w ten sposób, że zbiór $f(U) \cup h(U)$ składa się z dwóch jednospójnych obszarów, których wspólnym brzegiem jest ta krzywa (rys. 1 - zbiór $C \setminus (f(U) \cup h(U))$ jest zaznaczony linią ciągłą). Układ krzywych $C \setminus (f(U) \cup h(U))$ można aproksymować w sensie Hausdorffa jedną krzywą analityczną zamkniętą Jordana (rys. 1 - linia przerywana), a tę z kolei, na mocy lematu 1, można aproksymować w sensie Frécheta, a więc tym bardziej w sensie Hausdorffa, krzywą analityczną zamkniętą Jordana J, na której pewna funkcja wymierna postaci (17) jest czysto urojona. Niech teraz funkcja f^*, $f^*(0) = 0$, odwzorowuje konforemnie U na wnętrze krzywej

J, a funkcja h^*, $h^*(0) = \infty$, odwzorowuje konforemnie U na zewnętrze krzywej J. Para (f^*, g^*), $g^* = \frac{1}{h^*}$, tworzy parę Aharonova, która aproksymuje w sensie zbieżności niemal jednostajnej parę (f,g). Z drugiej strony para (f^*, g^*) jest parą wewnętrzną. Istotnie, jeśli przez $\Omega(w)$ oznaczymy funkcję wymierną, która na J przyjmuje wartości czysto urojone, to funkcje złożone $\Omega(f^*(z))$ i $\Omega(\frac{1}{g^*(z)})$ są funkcjami meromorficznymi w kole U o jedynym biegunie w $z = 0$ rzędu N i przedłużającymi się w sposób ciągły na U w ten sposób, że przekształcają brzeg ∂U na odcinki położone na osi urojonej. Na mocy zasady symetrii Schwarza funkcje te przedłużają się jako funkcje meromorficzne na zewnętrze koła jednostkowego, przy czym jedynym biegunem jest tu $z = \infty$ i jest to również biegun rzędu N. W rezultacie są to funkcje wymierne o jedynych biegunach tego samego rzędu N w $z = 0$ i $z = \infty$, przy czym są one czysto urojone na okręgu ∂U. Oznaczając je odpowiednio przez $\chi_1(z)$ i $\chi_2(z)$, stwierdzamy, że funkcje $w_1 = f^*(z)$ i $w_2 = g^*(z)$ spełniają układ równań $\Omega(w_1) = \chi_1(z)$ i $\Omega(\frac{1}{w_2}) = \chi_2(z)$, a więc para ($f^*$, g^*) jest parą wewnętrzną. Udowodniliśmy tym samym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2

Zbiór par wewnętrznych jest gęsty w zbiorze ekstremalnych par Aharonova.

Badania ekstremów funkcjonałów różniczkowalnych w rodzinie par Aharonova można zatem w wielu wypadkach sprowadzić do szukania tych ekstremów w zbiorze par wewnętrznych.

LITERATURA

[1] Hummel J.A., Schiffer M.M.: Variational methods for Bieberbach-Eilenberg functions and for pairs, Ann.Acad.Fenn.,Ser.A., I Math.3 (1977), 3-42.

[2] Miśta K.: Sur les inégalites bilinéaires de Grunsky pour les couples de fonctions qui n'empiétent pas l'une sur l'autre, I ukaże się w Demonstratio Mathematica. Zeszyt No 1 vol. XII 1979.

ВНЕШНИЕ ПАРЫ АХАРОНОВА

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается некаторая система уравнений с двумя неизвестными функциями вида (3) где функция $\Omega(w)$ есть рациональная функция с единственными полюсами в 0 и ∞, одинаковой степени N, функции $\chi_1(z)$, $\chi_2(z)$ являются функциями рациональными с единственными полюсами в 0 и ∞, той же степени N, притом мнимые на единичном круге. Кроме того $\mathrm{Re}(C_1) = \mathrm{Re}(C_2)$, $I_m \lambda = 0$. Показано (теорема 1) что всякая пара, которая удовлетворяет этой системе уравнений является парой Ахаронова. Пару Ахаронова которая удовлетваряет систему (3) называем внешной парой. Показано тоже (теорема 2) что множество внешних пар есть плотное в множестве пар Ахаронова.

INTERIOR PAIRS OF AHARONOV

S u m m a r y

This paper deals with a system of differential-functional equations of two unknown functions of the form (3), where the functions $\Omega(w)$, $\chi_1(z)$ and $\chi_2(z)$ are rational with 0 and ∞ as the only poles of the same order N and moreover $\chi_1(z)$, $\chi_2(z)$ are purely imaginary on the unit circle, and in addition Re C_1 = Re C_2, Im λ= 0. We obtain (theorem 1) that every pair of functions satisfying a system of the form (3),constitute the pair of Aharonov, which has some additional properties. A pair of functions satisfying a system of the form (3) are called interior pair of Aharonov. We establich (theorem 2) that the set of interior pairs of Aharonov is dense in the set of all pairs of Aharonov.