ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Andrzej FLISOWSKI

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ASYMPTOTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\,\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$ I

Streszczenie. W pracy dowodzi się twierdzenie o istnieniu i przedłużalności rozwiązań układu (α) spełniających warunek (γ). Następnie zostaje sformułowane twierdzenie gwarantujące istnienie powierzchni walcowej, przez którą rozwiązania układu (α) nie wychodzą na zewnątrz. Dodając założenie, że początek układu nie jest punktem przyciągania, otrzymujemy z uzyskanego twierdzenia - twierdzenie o istnieniu rozwiązania okresowego.

Zajmować się będziemy równaniem:

$$\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\,\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0,$$

które jest równoważne układowi

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f_1(x, y)\,y - g_1(x, y) \tag{α}$$

oraz równaniem

$$\frac{dy}{dx} = -f_1(x, y) - \frac{g_1(x, y)}{y} \tag{β}$$

Dla zrozumienia dalszych rozważań konieczna jest znajomość prac [1, 2, 3]. Wyniki uzyskane w tych pracach stanowią podstawę do badania zapowiedzianego równania.

Rozwiązania układu (α) i równania (β) rozumiemy w sensie uogólnionym, jako rozwiązania układu

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(s)\,ds$$

$$y(t) = y(t_0) - \int_{t_0}^{t} \left\{ f_1\left[x(s), y(s)\right] y(s) + g_1\left[x(s), y(s)\right] \right\} ds$$

i równania

$$y(x) = y(x_0) - \int_{x_0}^{x} \left\{ f_1[s, y(s)] + \frac{g_1[s, y(s)]}{y(s)} \right\} ds$$

Rozwiązania układu (α) i r-nia (β), jeżeli istnieją, odpowiadają sobie w ten sam sposób jak rozwiązania układu (1) i równania (2) rozważane w pracach [1] i [2], a które teraz będą grały rolę pomocniczą w badaniu rozwiązań układu (α).

Założenie 1^o

Funkcje $f_1(x,y)$ i $g_1(x, y)$ są określone w całej płaszczyźnie, ograniczone w każdym prostokącie, całkowalne po x przy każdym y i spełniają lokalnie warunek Lipschitza ze względu na zmienną y. Ponadto funkcja $g(x) = g_1(x, o)$ spełnia założenia 3^o Hipotezy H z pracy [1].
[To znaczy $x \cdot g(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i dla każdego przedziału $\langle a, b \rangle$, gdzie $b<0$ lub $a>o$ istnieje $c_1 > 0$ takie, że $|g(x)| \geq c_1$ w $\langle a, b \rangle$]

Z założenia 1^o wynika, że układ (α) ma dla każdego warunku początkowego postaci

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (x_0\ y_0) \neq (0, 0) \tag{γ}$$

rozwiązanie określone w otoczeniu liczby t_0 przedłużalne w prawo poza każdy kompakt.

Istotnie, w prostokącie R: $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq \frac{y_0}{2}$ $a>0$ i dowolne, $y_0 \neq 0$ prawa strona równania (β) spełnia warunki twierdzenia Caratheodory'ego (patrz [5] str. 54). Ponadto wraz z $g_1(x, y)$ także funkcja $\frac{g_1(x,y)}{y}$ spełnia w R warunek Lipschitza, bo jeżeli (x, y_1) i (x, y_2) należą do prostokąta R, a $|g_1(x,y)| \leq M$ w R i L jest stałą Lipschitza dla $g_1(x, y)$ w R, to

$$\left| \frac{g_1(x, y_1)}{y_1} - \frac{g_1(x, y_2)}{y_2} \right| =$$

$$= \left| \frac{g_1(x, y_1)}{y_1\ y_2} (y_2 - y_1) + \frac{g_1(x, y_1) - g_1(x, y_2)}{y_2} \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{4M}{y_0^2} + \frac{2L}{|y_0|} \right) \cdot |y_2 - y_1|$$

Wynika stąd podobnie jak w przypadku równania (2) w pracy [1], że rozwiązanie $\bar{y}(x)$ równania (β) spełniające warunek $\bar{y}(x_0) = y_0$, $y_0 > 0$ jest określone dla wszystkich $x \geq x_0$, lub istnieje $\bar{x}$ takie, że $\lim_{x \to \bar{x}-0} y(x) = 0$ i $\bar{t} < +\infty$ takie, że odpowiadające $\bar{y}(x)$ rozwiązanie $[x(t), y(t)]$ układu (α) spełnia warunki $\lim_{t \to \bar{t}-0} x(t) = \bar{x}$ $\lim_{t \to \bar{t}-0} y(t) = 0$ i uzupełnione punktem

$(\bar{t}, \bar{x}, 0)$ jest dalej rozwiązaniem układu (α). Ponadto z warunku Lipschitza dla $g_1(x, y)$ w punkcie $(\bar{x}, 0)$ wynika istnienie liczby $m_1 > 0$ takiej, że $g_1(x,y) \geqslant m_1$ w prostokącie R_1: $\frac{\bar{x}}{2} < x < \bar{x}$, $-c \leqslant y < 0$, bo przy pewnej liczbie $L > 0$ jest w R_1; $-L|y| \leqslant g_1(x,y) - g_1(x, o)$, a że z założenia $g_1(x, 0) \geqslant m > 0$ w R_1, to

$$g_1(x, y) \geqslant m - L|y| \text{ i dla } y > -\frac{m}{2L} \text{ jest } g_1(x, y) \geqslant \frac{m}{2}$$

Wynika stąd, znów analogicznie jak w pracy [1], że z punktu $(\bar{t}, \bar{x}, 0)$, $\bar{t}$, $\bar{x}$ - dowolne, wychodzi w prawo rozwiązanie układu (α). Dowodzi to istnienia i przedłużalności rozwiązań równania (α) spełniających warunek (γ). Nawiasem mówiąc, mamy także jednoznaczność w obszarach, gdzie $y \neq 0$, z czego zresztą w tym rozdziale nie będziemy korzystali.

Uwaga 1

Wydaje się, że założenie 1° samo nie zapewnia jednoznaczności rozwiązań układu (α) na osi x. Ponieważ chodzi tylko o jednoznaczność w prawo, to potrzeba nam tylko, by to równanie nie posiadało dwóch różnych trajektorii wychodzących z punktu $(\bar{x}, 0)$, w przypadku gdy $\bar{x} > 0$ i trajektorie (ich części) położone są w IV ćwiartce płaszczyzny i gdy $\bar{x} < 0$ a trajektorie (ich części) są położone w II ćwiartce. Na to wystarczy założenie, że $g_1(x, y)$ nie maleje ze względu na y w tych ćwiartkach płaszczyzny, a nawet tylko w dolnym otoczeniu osi x dla $x > b$ i w górnym jej otoczeniu dla $x < a$.

Warunki dla podstawowego, tej pracy, twierdzenia, do którego sformułowania za chwilę przechodzimy, nie zawierają tego założenia. Za to będzie tu mowa o specjalnym typie obwodu.

Rozwiązania układu (α) czy równania (β) są funkcjami absolutnie ciągłymi i spełniają prawie wszędzie w zwykłym już sensie odpowiednio układ (α) i równanie (β). Sformułujemy teraz założenia dla zapowiedzianego twierdzenia.

Hipoteza A

1) Spełnione jest założenia 1°.
2) Istnieje funkcja $f(x)$ określona na całej osi, ograniczona w każdym skończonym przedziale i całkowalna taka, że w całej płaszczyźnie jest spełniona nierówność $f(x) \leqslant f_1(x, y)$.
3) $g_1(x, 0) < g_1(x, y)$ dla $y > 0$.

   i $g_1(x, 0) > g_1(x, y)$ dla $y < 0$.
4) W płaszczyźnie $x\,y$ istnieje obwód K składający się z łuków ciągłych K_1 i K_2 oraz odcinków K_3 i K_4 o równaniach

K_1 : $y = \varphi(x)$ $a < x < b$

$\varphi(x) > 0$ dla $a \leqslant x < b$, $\varphi(b) = 0$

K_2 : $y = \psi(x)$ $a < x < b$

$\psi(a) = 0$, $\psi(x) < 0$ dla $a < x \leqslant b$

K_3 : $x = b$, $\psi(b) \leqslant y < 0$

K_4 : $x = a$, $0 < y \leqslant \varphi(a)$

taki, że przez obwód K trajektorie układu $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -f(x)\, y - g(x)$ nie wychodzą na zewnątrz K.

<u>Uwaga 2</u>

Wobec tego, że $g(x) = g_1(x, 0)$, to z założeń 1) i 2) Hipotezy A wynika, że układ (α) posiada rozwiązania (w sensie uogólnionym) przy każdym warunku początkowym

$$x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0 \quad (x_0, y_0) \neq (0, 0)$$

O obwodzie składającym się z łuków $K_1 - K_4$ będziemy mówili, że jest typu Ł. Każdy z obwodów, których istnienie wykazywaliśmy w pracach [2] i [3] jeżeli nie jest typu Ł, można go takim zastąpić przy zachowaniu własności, że przez zbudowaną nad nim powierzchnię walcową całki (1) omawiane w [2], [3] nie wychodzą. Wynika to w szczególności z udowodnionej dla tego układu jednoznaczności trajektorii.

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy A, to przez powierzchnie $S: \{t, x, y\} \left\{(x, y) \in K,\ t - \text{dowolne}\right\}$ rozwiązania układu (α) nie wychodzą na zewnątrz (przy t rosnącym).

<u>**Dowód**</u>

Jeżeli punkt $(x_1, y_1) \in K_1$ i $a < x_1 < b$, a $\tilde{y}(x)$ jest całką równania (2) omawianą w [1], przechodzącą przez ten punkt, to fakt, że całka ta w punkcie (x_1, y_1) nie wychodzi poza K_1 znaczy, że dla $x > x_1$ i dość bliskich x_1 jest $\tilde{y}(x) < \varphi(x)$. Skorzystamy ze znanej nierówności różniczkowej podanej przez T. Ważewskiego i uogólnionej przez J. Szarskiego [4], która zastosowana do naszego przypadku z założenia, że nierówność

$$D_+\, y(x) < -f(x) - \frac{g(x)}{y(x)}$$

[gdzie $y(x)$ całka równania (β) przechodząca przez punkt (x_1, y_1)]

jest spełniona prawie wszędzie, a funkcja $y(x)$ jest absolutnie ciągła, pozwala wnioskować, że $y(x) < \tilde{y}(x)$ dla $x > x_1$ i dość bliskich x_1, gdzie $\tilde{y}(x)$ jest całką górną w prawo równania (2) omawianego w [1] przechodzącą przez punkt (x_1, y_1).

Ze względu na jednoznaczność rozwiązań równania (2) omawianego w [1] całka górna jest tu po prostu całką.

Mamy więc $y(x) \leq \varphi(x)$ dla $x \geq x_1$ i dość bliskich x_1, co znów oznacza, że całka $y(x)$ nie wychodzi w punkcie (x_1, y_1) poza K_1. Znaczy to także, że żadna z całek układu (α) spełniająca warunek:

$$x(t_0) = x_1 \quad y(t_0) = y_1, \quad t_0 \text{ - dowolne} \qquad (\gamma')$$

gdzie $y_1 = \varphi(x_1)$, $x_1 < b$ nie wychodzi w punkcie (t_0, x_1, y_1) na zewnątrz powierzchni S.

W analogiczny sposób wykazuje się, że rozwiązania układu (α) spełniające warunek (γ') nie wychodzą poza S, gdy $y_1 = \psi(x_1)$; $a < x_1 < b$.

Jest to także oczywiste, gdy punkt $(x_1, y_1) \in K_3$ i $\psi(b) < y_1 < 0$ lub $(x_1, y_1) \in K_4$ i $0 < y_1 < \varphi(a)$.

Rozważone przypadki wyczerpują wszystkie punkty powierzchni S, a zatem przez żaden punkt tej powierzchni rozwiązania układu (α) nie wychodzą na zewnątrz S.

Z Twierdzenia 1 wynika, że dla każdego twierdzenia z pracy [3] dotyczącego istnienia obwodu K i odpowiadającej mu powierzchni S, przez którą całki układu (1) nie wychodzą, można sformułować twierdzenie analogiczne o istnieniu powierzchni walcowej S, przez którą całki naszego układu (α) nie wychodzą.

W sformułowaniach tych należy przyjąć założenia 1), 2), 3) Hipotezy A a dla funkcji $f(x)$ i $g(x) = g_1(x, 0)$ przyjąć założenia twierdzenia z pracy [3], którego odpowiednik formułujemy, gwarantujące istnienie obwodu K.

Oznaczając przez T1 którekolwiek z twierdzeń pracy [3] dotyczące istnienia obwodu K, a przez T2 odpowiadające mu twierdzenie w tej pracy, otrzymujemy następujący schemat dla sformułowania takich twierdzeń.

Twierdzenie T2

Jeżeli spełnione są założenia 1), 2), 3) Hipotezy A oraz 4': funkcje $f(x)$ i $g(x) = g_1(x, 0)$ spełniają założenia twierdzenia T 1, to w płaszczyźnie $x\,y$ istnieje obwód K zawierający początek układu w swoim wnętrzu taki, że przez powierzchnie $S = (t, x, y) \; \{(x, y) \in K, \; t \text{ - dowolne}\}$ rozwiązania układu (α) nie wychodzą.

Tak na przykład w sformułowaniu odpowiednika twierdzenia B założenie 4' obejmowałoby następujące cztery założenia

4 a: $f(x)$ jest całkowalna i ograniczona w każdym przedziale skończonym i istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $f(x) < 0$ dla $|x| < \alpha$

4 b: $\limsup\limits_{x \to +\infty} F(x) - \liminf\limits_{x \to -\infty} F(x) > \varepsilon > 0$

4 c: $\sup\limits_{x < 0} F(x) < N < +\infty$ i $\inf\limits_{x \geq 0} F(x) > M > -\infty$

$$4\ d: \left[\sup_{x>0} F(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad G(+\infty) = +\infty\right]$$

$$\text{i} \left[\inf_{x<0} F(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad G(-\infty) = +\infty\right]$$

$$\text{gdzie } F(x) = \int_0^x f(s)\, ds \qquad G(x) = \int_0^x g_1(s, o)\, ds$$

Zauważmy, że przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 1 niezależnie od teorii dotyczącej układu (1) podanej w pracach [1], [2], [3] mogłoby sprawić wiele kłopotu. Wynika to między innymi stąd, że prawe strony układów (α) obecnej pracy i układu (1) z pracy [1] spełniają podobne warunki tylko w małym otoczeniu osi x. Nie zakładaliśmy na przykład, że funkcja $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ są ograniczone w każdym pasie $\lambda < x < \mu$, y - dowolne. Warunek ten był spełniony przez funkcje $f(x)$ i $g(x)$ w przypadku układu (1) w pracy [2], i pozwolił łatwo wykazać lemat 1, co teraz nie byłoby tak proste.

Można by także osłabić niektóre założenia Hipotezy A. W dowodzie twierdzenia 1 nie korzystaliśmy na przykład z jednoznaczności rozwiązań układu (α) ani z jednoznaczności jego trajektorii, której zresztą w punktach, dla których $y = 0$, nie wykazywaliśmy. Warunek Lipschitza lokalny dla funkcji $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ był nam potrzebny tylko dla punktów osi x różnych od zera, aby wykazać, że w prostokącie R_1 jest $g_1(x, y) \geq m_1 > 0$. Zauważmy wreszcie, że przynajmniej przy formułowaniu odpowiedników tych twierdzeń z pracy [3], przy których obwód K może zawierać dowolnie duży prostokąt o środku w punkcie (0, 0), można by założenia dotyczące funkcji $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ zmieniać dość dowolnie w obrębie pewnego dowolnie przyjętego prostokąta. Ta ostatnia uwaga może być podstawą do formułowania nowych twierdzeń.

Układ (α) obejmuje oczywiście szczególne przypadki, gdy na przykład $f_1(x, y) = f(x)$ lub $g_1(x, y) = g(x)$, przy których sformułowanie Hipotezy A się upraszcza. Dla tych specjalnych przypadków szczególnego znaczenia nabiera oczywiście uwaga o możliwości osłabienia założeń hipotezy A. Tak na przykład, jeżeli $g_1(x, y) = g(x)$ to i dla punktów osi x nie trzeba zakładać warunku Lipschitza.

Założenie 1^o można by więc w tym przypadku, to znaczy dla układu:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -f_1(x, y)\, y - g(x) \tag{δ}$$

zastąpić następującym

<u>Założenie 1'</u>

Funkcja $f_1(x, y)$ jest określona w całej płaszczyźnie, ograniczona w każdym prostokącie, całkowalna po x przy każdym y oraz jest ciągła ze względu na zmienną y a $g(x)$ spełnia założenie 3^o Hipotezy H z pracy [1].

Schemat dla formułowania odpowiednika twierdzenia T1 z pracy [3] dla układu (δ) miałby więc postać:
Jeżeli spełnione jest założenie 1' i założenie 2) Hipotezy A, a funkcje f(x) i g(x) spełniają założenia twierdzenia T1 z pracy [3], to w płaszczyźnie xy istnieje obwód K zawierający początek układu współrzędnych w swoim wnętrzu taki, że przez powierzchnię walcową $S = (t, x, y) \{(x, y) \in K, \ t - \text{dowolne}\}$ całki układu (δ) nie wychodzą.
W analogiczny sposób można zmienić założenia 1° w wypadku układu

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f(x)\, y - g_1(x, y)$$

i sformułować schemat odpowiednika twierdzenia T1 z pracy [3].

LITERATURA

[1] Flisowski A.: O rozwiązaniach równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka-numer bieżący.

[2] Flisowski A.: O ograniczoności rozwiązań równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

[3] Flisowski A.: O własnościach asymptotycznych rozwiązań równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

[4] Szarski J.: Differential inequalities, Monografie Matematyczne PAN, Warszawa 1967.

[5] Коддингтон Э., Левинсон Н.: Теория обыкновенных дифференциональных уравнений, Издательство Иностранной Литературы, Москва 1958.

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\, \dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$. I

Резюме

В работе доказывается существование и продолжимость решений системы (α) удовлетворяющих условию (β). Затем, формулируется теорема, обеспечивающая существование цилиндрической поверхности, через которую решения системы (α) не выходят наружу. Прибавляя предположение, что начало системы не есть точка притяжения, из приведенных теорем получаются теоремы о существовании периодического решения.

ABOUT CERTAIN ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\,\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$. I

S u m m a r y

This paper proves the existence and continuation of the solutions of system (α) satisfying condition (γ).

Then there is formulated a theorem ensuring the existence of the surface area of a cylinder, beyond which the solutions of the system (α) do not go out.

Adding the assumptiom that the beginning of the system is not the point of attraction, from the obtained theorems we receive a theorem about the existence of periodic solution.