ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Andrzej FLISOWSKI

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ASYMPTOTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA ROŻNICZKOWEGO $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$ II

Streszczenie. W pracy niniejszej zajmuję się tymi samymi w zasadzie zagadnieniami, co w pracy [1], ale przy zmienionych nieco założeniach i inną metodą. Metoda ta opiera się na lemacie, który stanowi uogólnienie twierdzenia Cz. Klucznego z pracy [2]. Uzyskane w ten sposób wyniki nie pokrywają się z wynikami pracy [1] i istnieją przypadki, w których rozstrzygają jedne a nie rozstrzygają drugie i na odwrót.

Do równania

$$\ddot{x} + f_1(x, \dot{x}) + g_1(x, \dot{x}) = 0 \tag{I}$$

zastosujemy metodę opisaną w [2], aby sformułować odpowiedniki twierdzeń z pracy [3] różniące się od twierdzeń sformułowanych w pracy [1]. Twierdzenia te dotyczyć będą istnienia powierzchni walcowej, przez którą całki układu

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f_1(x, y)y - g_1(x, y) \tag{II}$$

nie wychodzą na zewnątrz.

Oczywiście równanie (I) jest równoważne układowi (II).

Zajmiemy się szczegółowo przypadkiem, gdy $g_1(x, y) = g(x)$ a więc układem:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f_1(x, y)y - g(x) \tag{1}$$

i równaniem

$$\frac{dy}{dx} = -f_1(x, y) - \frac{g(x)}{y} \tag{2}$$

a następnie wskażemy, jakie należałoby poczynić zmiany w uzyskanym twierdzeniu, aby pozostało prawdziwe i dla układu (II).

Wykażemy najpierw pewien lemat, który został podany w [4] i udowodniony w inny zresztą sposób i przy innych nieco założeniach.

Lemat

Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = H(x, y), \tag{3}$$

gdzie funkcja $H(x, y)$ określona w zbiorze R: $x_1 < x < x_2$, $y \neq 0$, jest całkowalna po x przy każdym y i spełnia lokalnie w R warunek Lipschitza ze względu na zmienną y dla $y \neq 0$ oraz warunek

$$H(x, y) + H(x, -y) < 0 \tag{4}$$

Jeżeli $\varphi(x)$ jest rozwiązaniem równania (3) określonym w przedziale $J = (x_1, x_2)$ i $\varphi(x) > 0$ w (x_1, x_2), to przez krzywą K: $y = -\varphi(x)$, $x \in J$, rozwiązania równania (3) nie wychodzą w lewo z obszaru R [w lewo znaczy "przy malejącym x"].

Dowód

Z założeń dotyczących funkcji $H(x, y)$ wynika, że rozwiązania równania (3) istnieją i są w R jednoznaczne. Oznaczmy dla wygody $-\varphi(x) = \psi(x)$. Jak $\varphi(x)$ tak i $\psi(x)$ jest funkcją w J absolutnie ciągłą i posiada prawie wszędzie pochodną, przy czym $\psi'(x) = -H[x, -\psi(x)]$, a z warunku (4)

$$\psi'(x) > H\ [x, \psi(x)]$$

wobec czego z twierdzenia o nierównościach różniczkowych i z jednoznaczności rozwiązań równania (3) wynika, że jeżeli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania (3) z warunkiem początkowym $y(\bar{x}) = \psi(x)$, to dla $x < \bar{x}$ [i dość bliskich] jest $y(x) > \psi(x)$.

W przypadku gdy $\varphi(x) < 0$ w (a,b) jest rozwiązaniem równania (3) w $\langle a, b)$, to teza lematu zmieni się o tyle, że przez krzywą K: $y = -\varphi(x)$, $x \in \langle a, b)$ rozwiązania równania (3), nie wychodzą w prawo z obszaru R.

Uwaga 1

Jeżeli warunek (4) jest spełniony ostro, to założenie, że funkcja $H(x, y)$ spełnia warunek Lipschitza staje się zbędne:

Sformułujemy teraz zapowiedziane twierdzenia.

Hipoteza B

1° W płaszczyźnie x, y poza prostokątem R: $a < x < b$, $|y| < c$, $a < b$, $a < 0 < b$ funkcja $f_1(x, y)$ jest całkowalna po x i spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na zmienną y oraz istnieje funkcja $f(x)$ określona i całkowalna w przedziale $\langle a, b\rangle$ taka, że $f(x) < f_1(x, y)$ dla $a < x < b$, $|y| > c$, przy czym $\int_a^b f(s)\, ds = 2\varepsilon > 0$

2° Funkcja $g(x)$ jest określona i całkowalna na całej osi, ograniczona w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz $x \cdot g(x) > 0$ poza przedziałem $\langle a, b\rangle$ i dla każdego przedziału $\langle\alpha, \beta\rangle$ osi x leżącego poza przedziałem $\langle a, b\rangle$ istnieje liczba $m > 0$ taka, że $|g(x)| \geq m$ w $\langle\alpha, \beta\rangle$.

3° Całka równania (2) wychodząca w prawo z punktu $[b, \bar{y}]$, $\bar{y} \geq c$ osiąga dodatnią część osi x i podobnie całka w lewo z punktu $[a, \hat{y}]$, $\hat{y} < -c$ osiąga ujemną część osi x.

4° Poza pasem $a \leq x \leq b$, y - dowolne jest spełniony warunek:

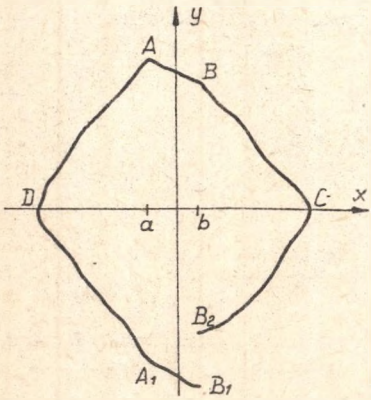
$$f(x, y) + f(x, -y) > 0$$

Twierdzenie I

Przy spełnionych założeniach Hipotezy B istnieje obwód, zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Dowód

Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 4 z pracy [3] istnieją rozwiązania równania $\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}$, $y^{+}(x)$ i $y^{-}(x)$ określone w $\langle a, b\rangle$, $y^{+}(x) > c$, $y^{-}(x) < -c$ dla $a < x < b$, takie że $y^{+}(a) + y^{-}(a) = 0$, $y^{+}(b) < y^{+}(a) - \varepsilon$, $y^{-}(b) < y^{-}(a) - \varepsilon$. Oznaczmy $A[a, y^{+}(a)]$, $B[b, y^{+}(b)]$, $A_1[a, y^{-}(a)]$, $B_1[b, y^{-}(b)]$. Oznaczmy nadal przez $y^{+}(x)$ całkę teraz już równania (2) wychodzącą z punktu B w prawo i osiągającą oś ox_{+} w punkcie $C(\gamma, 0)$ Podobnie oznaczmy nadal przez $y^{-}(x)$ całkę równania (2) wychodzącą w lewo z punktu A_1 i osiągającą oś ox_{-} w punkcie $D(\delta, 0)$. Jest $\delta < a < 0 < b < \gamma$. Przedłużmy dalej łuk $A\,B\,C$ całki $y^{+}(x)$ wykresem funkcji $-y^{+}(x)$ dla $b < x < \gamma$ a łuk $B_1\,A_1\,D$ całki $y^{-}(x)$ wykresem funkcji $-y^{-}(x)$ dla $\delta < x < a$ i oznaczmy $B_2 = [b, -y^{+}(b)]$ i $A_2 = [a, -y^{-}(a)] = A$. Otrzymane w ten sposób łuki $A\,B\,C\,B_2$ i $B_1\,A_1\,D\,A$ domknijmy odcinkiem $B_1\,B_2$. Otrzymamy w ten sposób obwód zamknięty, przez który całki układu (2) nie wychodzą.



Rys. 1

Istotnie, jak zauważyliśmy w pracy [1] Założenie 1°, które tu jest spełnione, zapewnia już jednoznaczność rozwiązań układu (II) poza osią x, a z uwagi 1 ([1]) jednoznaczność jest i na osi x poza przedziałem $\langle a, b\rangle$. Wobec tego łatwo widać, że przez otrzymany obwód trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Aby metodę opisaną w tym rozdziale można było stosować do układu (II) trzeba zagwarantować jednoznaczność rozwiązań tego układu poza prostokątem R.

Muszą więc być spełnione założenia Hipotezy B, z zastąpieniem $g(x)$ przez $g_1(x, 0)$ w założeniu 2°, tej hipotezy, następnie założenie 3) hipotezy A z [1] oraz warunek zapewniający jednoznaczność rozwiązań układu (II) na osi x poza przedziałem $\langle a, b\rangle$, na przykład podany w uwadze 1 w [1]. Zwracamy uwagę, że wtedy [przy jednoznaczności na osi x] nie ma potrzeby, by uzyskany obwód był typu Ł.

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę na istotne różnice w założeniach twierdzeń tej pracy oraz w pracy [1].

A więc w Twierdzeniu I nie występuje założenie o istnieniu funkcji $f(x)$ określonej na całej osi, takiej by w całej płaszczyźnie było $f(x) < f_1(x, y)$. Funkcja taka może w ogóle nie istnieć, co więcej funkcje $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ mogą nie być ograniczone w żadnym pasie $\alpha < x < \beta$.

Przykład

Rozważmy równanie:

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x}\,|\dot{x}| + g_1(x, \dot{x}) = 0 \tag{5}$$

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ określona i ciągła na całej osi spełnia warunek $f(x) = 0$ dla $o = a < x < b$, a poza tym przedziałem jest dodatnia, $g_1(x,y)$ określona i ciągła w całej płaszczyźnie; $g_1(x, y) = g(x)$ dla $|y| < 1$, przy czym $g(x)$ spełnia warunek $x \cdot g(x) > 0$ dla $x \neq 0$ oraz

$$g_1(x, y) = \begin{cases} g(x) \cdot y & \text{dla} \quad x \geq 0 \quad y \geq 1 \\ g(x) \cdot [2 - y] & \text{dla} \quad x \leq 0 \quad y \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{i } g_1(x, y) = g(x) \cdot (y + 2) \quad \text{dla} \quad y < -1 \quad x - \text{dowolne}$$

Równanie (5) równoważne jest układowi:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f(x)\,y\,|y| - g_1(x, y) \tag{6}$$

Mamy jeszcze równanie

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot |y| - \frac{g_1(x, y)}{y} \tag{7}$$

Oznaczmy przez $y^+(x)$ i $y^-(x)$ całki równania (7) określone w przedziale $\langle a, b\rangle$ i przechodzące odpowiednio przez punkty (a, 2) i (a, -2).

Ponieważ dla $y = 2$, $a < x < b$ prawa strona równania (7) jest równa $-g(x)$ więc $y^+(x) < 2$ dla $a < x$ i w szczególności $y^+(b) < 2$. Dla $y = -2$, $a < x < b$ jest prawa strona równania (7) równa zeru i wobec tego $y^-(x) \equiv -2$

dla $a<x<b$. Łatwo sprawdzić, że gdyby $y^+(x)$ i $y^-(x)$ wychodziły odpowiednio z punktu (a, c), (a, -c), $c>2$, to także mielibyśmy $y^+(b) + y^-(b) < 0$. Spełniony jest tu więc warunek, który w założeniach hipotezy B zagwarantowany był równością $F(b) - F(a) = 2\varepsilon$ i pokazany w inny sposób. Są spełnione też pozostałe założenia hipotezy B.

A więc funkcje $f_1(x,y) = f(x) \cdot |y|$ i $g_1(x, y)$ spełniają lokalnie warunek Lipschitza ze względu na zmienną y. Funkcja $g_1(x, y)$ w sąsiedztwie osi x jest równa funkcji g(x) i nie maleje ze względu na y.

Całki równania (7) wychodzące w prawo z punktu (b, c), czy w lewo z punktu (a, -c), $c>0$ osiągają oś ox jeśli założymy, na przykład $G(+\infty) = G(-\infty) = +\infty$.

Także warunek na zbliżenie, który tu ma postać:

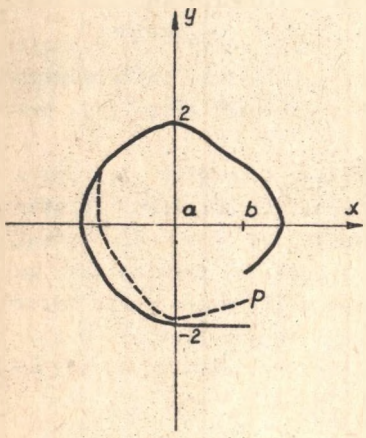
$$-2 f(x) \cdot |y| - \frac{g_1(x,y)}{y} + \frac{g_1(x,-y)}{y} \leqslant 0$$

jest spełniony, bo lewa strona tej nierówności jest dla $y \leqslant 1$ i dowolnego x równa $-2 f(x) \cdot |y| < 0$,

dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$ równa $-2 f(x) \cdot |y| + 2 g(x)\left[\frac{1}{y} - 1\right] < 0$

a dla $x<0$, $y \geqslant 1$ ma postać $-2 f(x) \cdot |y|$, a więc jest mniejsza lub równa zeru.

Obwód [patrz dowód Twierdzenia I] podany jest na rysunku 2.



Rys. 2

Z uwagi na to, że zagwarantowana jest jednoznaczność trajektorii w punktach osi x, nie wymaga on zastąpienia go obwodem typu Ł, chociaż można by to uczynić wyprowadzając w prawo i lewo całkę równania (7) z punktu $P(b,\alpha)$, gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[y^+(b) - 2\right]$$

[na rysunku linia kreskowana].

<u>Uwaga 2</u>

Uwaga 6 z pracy [3] zastosowana do układu (II) prowadzi do następującego wniosku. Funkcje $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ nie muszą być na osi x ciągłe ze względu na zmienną y. Wystarczy, by posiadały tam granice jednostronne.

Tak na przykład funkcja $g_1(x, y)$ mogłaby być określona przy pomocy dwóch funkcji:

$g^+(x, y)$ określonej dla $y > 0$, x - dowolne

$g^-(x, y)$ określonej dla $y < 0$, x - dowolne

i spełniających w swoich obszarach określoności warunki Caratheodory'ego. Funkcja $g_1(x, y)$ mogłaby mieć wtedy postać:

$$g_1(x,y) = \begin{cases} g^+(x,y) & \text{dla } y>0, \ x \text{ - dowolne} \\ g^-(x,y) & \text{dla } y<0, \ x \text{ - dowolne} \end{cases}$$

Aby było spełnione założenie 3) hipotezy A z [1] musiałby oczywiście być spełniony warunek:

$$g^-(x, y_1) < g^+(x, y_2) \quad \text{dla } y_1<0, \ y_2>0, \ x \text{ - dowolne} \tag{8}$$

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to w szczególności

$$g^-(x, 0) < g^+(x, 0)$$

i funkcja $g_1(x, 0) = g(x)$ mogłaby być określona dowolnie, byle spełniała założenia odpowiednich hipotez z pracy [1] czy też pracy bieżącej, a więc i nierówność:

$$g^-(x, 0) \leq g_1(x, 0) < g^+(x, 0)$$

W ten sposób zapewnione byłoby istnienie granic jednostronnych funkcji $g_1(x, y)$ oraz warunek (8). To wraz z pozostałymi założeniami odpowiednich hipotez wystarcza do uzasadnienia twierdzeń tej pracy oraz pracy [1], bez istotnych zmian w ich sformułowaniu.

Uwaga 2 jest tylko przykładem możliwych uogólnień twierdzeń tej pracy oraz z pracy [1]. Rozszerzając ją, można by dopuścić nieciągłość pierwszego rodzaju funkcji $f_1(x, y)$ i $g_1(x, y)$ przynajmniej na skończonej liczbie linii postaci $y = y_i(x)$. Co ważniejsze jednak, to fakt że przy zachowaniu ogólnej metody opisanej w tej pracy oraz w [1], można podać twierdzenia [o istnieniu obwodu, o jakim w pracy mowa] dla przypadków, w których i założenia 3) hipotezy A z [1] nie jest spełnione. Jest to szczególnie ważne przy badaniu rozwiązań równania

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x, \dot{x}, t) = 0, \tag{9}$$

które często można sprowadzić do badania układu (1), w którym jednak funkcja $g_1(x, y)$ z reguły nie będzie spełniała założenia (8).

Tak na przykład modyfikując nieznacznie lemat można podać twierdzenie, w oparciu o które wykazuje się istnienie walca zawierającego oś t, przez który całki układu

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -f(x,y)y - g(x, y, t)$$

nie wychodzą, dla pewnych przypadków równań (9), obejmujących w szczególności równanie $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$, przy założeniach podanych choćby w [5]. To już wykracza jednak poza ramy zakreślone dla niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] Flisowski A.: O pewnych własnościach asymptotycznych rozwiązań równania różniczkowego $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$ I. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

[2] Kluczny Cz., Flisowski A.: O rozwiązaniach okresowych równania różniczkowego $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka, 15, 1970.

[3] Flisowski A.: O własnościach asymptotycznych rozwiązań równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka numer bieżący.

[4] Kluczny Cz.: O pewnych warunkach stabilności dla równania różniczkowego $x'' + f(x, x') = 0$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka, 11 1966.

[5] Opial Z.: Demonstration d'un théorème de N.Levinson et C. Langenhop, Ann. Polon. Math. 1960, 7 № 3 str. 241-246

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$ II

Р е з ю м е

При помощи видоизменения метода, приведенного в работе [2], получается теорема, обеспечивающая существование цилиндрической поверхности, через которую интегралы системы (II) не выходят наружу. Прибавляя предположение, что начало системы не есть точка притяжения, из приведенных теорем получаются теоремы о существовании периодического решения.

ABOUT CERTAIN ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION $\ddot{x} + f_1(x, \dot{x})\,\dot{x} + g_1(x, \dot{x}) = 0$ II

S u m m a r y

Modifying the method given in paper [2] we obtain a theorem ensuring the existence of the surface area of a cylinder, beyond which the integrals of system (II) do not go out. Adding the assumption that the beginning of the system is not the point of attraction, from the obtained theorems we receive a theorem about the existence of periodic solution.