ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 634

Andrzej FLISOWSKI

O ROZWIĄZANIACH RÓWNANIA LIÉNARDA

Streszczenie. Przy pewnych założeniach przypominających założenia Caratheodory'ego, choć różniących się od nich istotnie, wykazuje się istnienie, jednoznaczność i przedłużalność rozwiązań równania Liénarda.

Przy założeniu, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne przez $F(x)$ i $G(x)$ oznaczmy funkcje

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Przyjmujemy też oznaczenia: $\dot{x}$, $\ddot{x}$ niech oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną funkcji $x(t)$, natomiast y', y'' oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną funkcji $y(x)$.

Rozważmy równanie Liénarda:

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$

i równoważny mu układ

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -f(x)\,y - g(x) \tag{1}$$

oraz równanie

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y} \tag{2}$$

To ostatnie równanie rozważamy w półpłaszczyznach $\mathscr{X}^+$, gdzie $y > 0$ lub $\mathscr{X}^-$, gdzie $y < 0$.

Hipoteza H

1° Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są określone dla $-\infty < x < +\infty$, ograniczone w każdym przedziale skończonym, a więc i całkowalne.

2° Istnieje $\alpha > 0$ takie, że $f(x) < 0$ dla $|x| < \alpha$,

3° $x \cdot g(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i dla każdego przedziału $\langle a, b \rangle$, gdzie $b < 0$ lub $a > 0$ istnieje $c_1 > 0$ takie, że $|g(x)| > c_1$ w $\langle a, b \rangle$,

4^o Istnieją liczby J, H takie, że $F(x) > J$ dla $x > 0$, oraz $F(x) < H$ dla $x < 0$.

Z założenia 3^o wynika, że jedynym punktem osobliwym może być tylko początek układu współrzędnych.

Z Hipotezy H wynika istnienie granic [skończonych lub nieskończonych] funkcji $G(x)$ przy $x \to +\infty$ i przy $x \to -\infty$, a więc mają sens symbole $G(+\infty)$ i $G(-\infty)$. [Natomiast funkcja $F(x)$ nie musi być monotoniczna. Mogą nie istnieć jej granice przy $x \to +\infty$ lub przy $x \to -\infty$ i wówczas odpowiednie symbole $F(+\infty)$ lub $F(-\infty)$ nie mają sensu].

Rozwiązania układu (1) oraz równania (2) będziemy w całej tej pracy rozumieli w sensie uogólnionym, a mianowicie jako rozwiązania odpowiednio układu:

$$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^{t} y(s)\,ds$$

$$y(t) = y(t_o) - \int_{t_o}^{t} \left\{ f[x(s)]\, y(s) + g[x(s)] \right\} ds \tag{1*}$$

i równania:

$$y(x) = y(x_o) - \int_{x_o}^{x} \left[f(s) + \frac{g(s)}{y(s)} \right] ds \tag{2*}$$

Wykażemy, że założenia 1^o i 3^o Hipotezy H wystarczają, by układ (1*) przy każdym warunku początkowym $x(t_o) = x_o$, $y(t_o) = y_o$, gdzie $(x_o, y_o) \neq (0,0)$ posiadał rozwiązanie, które wychodzi poza każdy zbiór domknięty i ograniczony.

To samo dotyczy rozwiązań równania (2*) zawartych w $\mathcal{T}^+$ [czy $\mathcal{T}^-$].

W tym celu rozważmy najpierw równanie (2*).

Równanie to w dowolnym zbiorze postaci R: $a < x < b$, $y > c > o$, dla dowolnego warunku początkowego $y(x_o) = y_o$, $a < x_o < b$, $y_o > c$, posiada rozwiązanie, które wysycone w prawo osiąga bok $y = c$ lub $x = b$, natomiast w lewo bok $y = c$ lub $x = a$.

Wynika to z następujących uwag:

W zbiorze R jest spełniony warunek Lipschitza względem y, bo

$$\left| \frac{g(x)}{y_1} - \frac{g(x)}{y_2} \right| < \frac{|g(x)|}{c^2} \cdot |y_1 - y_2| < \frac{M}{c^2} \cdot |y_1 - y_2|$$

gdzie M takie, że $|g(x)| < M$ w $\langle a, b \rangle$, więc dla każdego warunku początkowego podanego wyżej istnieje rozwiązanie równania (2*) określone w otoczeniu punktu x_o [w otoczeniu prawym, jeżeli $x_o = a$] i jedyne w tym otoczeniu. Wynika stąd przedłużalność w prawo i w lewo aż do brzegu obszaru R.

Z ograniczoności funkcji $f(x)$ i $g(x)$ wynika ograniczoność funkcji podcałkowej równania (2^*), a stąd i ograniczoność całki wysyconej w R, wobec tego rozwiązanie, o którym mowa, osiąga w prawo jak podano bok $x = b$ lub $y = c$, a w lewo bok $x = a$ lub $y = c$.

Biorąc pod uwagę to, że c może być dowolnie małe, a a i b dowolne [byle $a<b$] wnioskujemy, że dla rozwiązania $y^+(x)$ przechodzącego przez $[x_0, y_0]$, x_0 - dowolne, $y_0>0$, albo istnieje $\bar{x}>x_0$ takie, że przy żadnym $c>0$ nie wychodzi ono przez bok $x = \bar{x}$ i wtedy $y^+(x)$ wysycone w R w prawo, dąży przy x dążącym do pewnego x_1, $x_0<x_1<\bar{x}$, do osi Ox, czyli $\lim\limits_{x\to x_1-0} y^+(x) = 0$, albo $y^+(x)$ jest określone w $<x_0 +\infty)$. W pierwszym przypadku uzupełniamy $y^+(x)$ punktem $[x_1, 0]$ i otrzymujemy $y^+(x)$ określone w przedziale $<x_0, x_1>$.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli $x_0<0$; $y_0>0$, to z założeń 2^0 i 3^0 Hipotezy H wynika, że całka $y^+(x)$ z $(x_0\ y_0)$ osiąga w prawo oś y w punkcie o rzędnej dodatniej. Wobec tego całka $y+(x)$ wychodząca z dowolnego punktu $(x_0\ y_0)$, $y_0>0$ i wysycona w prawo, albo jest określona w przedziale $<x_0, +\infty)$ albo istnieje $x_1>0$ takie, że $\lim\limits_{x\to x_1-0} y^+(x) = 0$ i podobnie całka $y^-(x)$ przechodząca przez punkt $(x_0\ y_0)$, $y_0<0$ wysycona w lewo albo jest określona w $(-\infty, x_0>$ albo istnieje $x_2<0$ takie, że $\lim\limits_{x\to x_2+0} y^-(x)=0$.
W przypadku gdy $\lim\limits_{x\to x_1-0} y^+(x) = 0$, $0<x_1<+\infty$, będziemy mówili, że $y^+(x)$ "osiąga" dodatnią część osi x lub krócej 0_{x_+} i podobnie $y^-(x)$ osiąga 0_{x_-} znaczy, że istnieje x_2, $-\infty<x_2<0$, takie że $\lim\limits_{x\to x_2+0} y^-(x) = 0$.

Jeżeli natomiast $x_0>0$, $y_0>0$, to założenia hipotezy nie wykluczają przypadku, że całka $y+(x)$ przez (x_0, y_0) wysycona w lewo dąży do początku układu, to znaczy możliwe jest, że $\lim\limits_{x\to 0+0} y^+(x) = 0$. Podobnie rzecz się ma z całką $y^-(x)$ przez punkt (x_0, y_0), $x_0<0$, $y_0<0$ wysyconą w prawo *).

Jeżeli całka $y_1(x)$ równania (2^*) położona w $\mathcal{F}^+$ [czy w $\mathcal{F}^-$] osiąga oś x w punkcie $(x_1, 0)$, $x_1 \neq 0$, to żadna inna całka tego równania położona w tej samej półpłaszczyźnie nie może osiągać osi x w tym punkcie. Załóżmy na przykład, że $x_1>0$ a $y_1(x)$ i $y_2(x)$ całki równania (2^*) położone w $\mathcal{F}^+$, osiągają oś x w punkcie $(x_1, 0)$. Z uwagi na jednoznaczność

*) Założenie 2^0 Hipotezy H było nam potrzebne tylko do tego celu, by zapewnić, że jeżeli $x_0<0$, to $x_1>0$ i jeżeli $x_0>0$, to $x_2<0$. Z równania (2^*) wynika jednak, że w pierwszym przypadku $y^+(0)> y^+(\bar{x}) + F(\bar{x})>F(\bar{x})$, gdzie $\bar{x}$ - dowolna liczba z przedziału $<x_0, 0)$, jeżeli więc dla pewnego takiego $\bar{x}$ będzie $F(\bar{x})\geq 0$, to $y+(0)>0$ i w konsekwencji $x_1>0$. Podobnie jest w drugim przypadku. Znaczy to, że założenie 2^0 może być osłabione.

poza osią x mielibyśmy $y_1(x) \neq y_2(x)$ dla $x < x_1$ oraz $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ w pewnym otoczeniu $< x_2, x_1)$ punktu x_1 i $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} [y_2(x) - y_1(x)] = 0$. Możemy oczywiście przyjąć, że $y_2(x) > y_1(x)$ dla $x_2 < x < x_1$ i $x_2 > 0$. Kładąc $u(x) = y_2(x) - y_1(x)$ mielibyśmy z (2^*)

$$\lim_{x \to x_1 - 0} u(x) = u(x_2) + \int_{x_2}^{x_1} g(s) \cdot \frac{u(s)}{y_2(s) \cdot y_1(s)}\, ds > 0,$$

co sprzeczne z założeniem, że granica ta jest równa zeru. W pozostałych przypadkach dowód jest analogiczny.

Wykażemy teraz, że jeżeli $x^* > 0$, to istnieje rozwiązanie $y^-(x)$ równania (2^*) położone w R^-, które "osiąga" oś O_x w punkcie $(x^*, 0)$. Istotnie, istnieje takie $\beta > 0$, że w prostokącie $R^- : \left\{ \frac{x^*}{2} \leqslant x \leqslant x^*, \quad -\beta < y < 0 \right\}$ spełniona jest nierówność $-f(x) - \frac{g(x)}{y} > 1$.

Wynika to z założeń 1° i 3° Hipotezy H, które gwarantują istnienie liczb $M > 0$, $c_1 > 0$ takich, że w $< \frac{x^*}{2}, x^* >$ jest $f(x) \leqslant M$ i $g(x) \geqslant c_1$. Wobec tego, jeżeli $\varepsilon > 0$ i punkt $[x^* - \varepsilon, -\varepsilon] \in R^-$, to półcałka $y^-(x)$ równania (2^*) przechodząca przez ten punkt dla $x \geqslant x^* - \varepsilon$ jest zawarta w R^- i osiąga oś x w punkcie $(\bar{x}, 0)$ takim, że $\frac{x^*}{2} < \bar{x} < x^*$.

Obierzmy ciąg ε_n w sposób następujący: ε_1 jak uprzednio ε. Oznaczmy punkt $P_1(x^* - \varepsilon_1, -\varepsilon_1)$ i przez $y_1(x)$ całkę przechodzącą przez punkt P_1 i osiągającą oś O_{x_+} w punkcie $(x_1, 0)$ następnie $\varepsilon_2 = x^* - x_1$ i $P_2(x_1, -\varepsilon_2)$ i podobnie przez $(x_2, 0)$ oznaczmy punkt, w którym całka $y_2(x)$ przechodząca przez P_2 osiąga oś O_{x_+} i dalej $\varepsilon_3 = x^* - x_2$, $P_3(x_2, -\varepsilon_3)$ itd. Łatwo widać, że ciąg ε_n dąży do zera i x_n dąży do x^*, gdy $n \to \infty$. Całki $y_n(x)$ można przedłużyć w lewo tak, by były określone, np. dla $x = \frac{x^*}{2}$.

Z jednoznaczności rozwiązań równania (2^*) wynika, że ciąg $y_n(\frac{x^*}{2})$ jest malejący, a z założenia 1° hipotezy, że jest także ograniczony i wobec tego ma granicę y^*. Łatwo widać, że całka przechodząca przez punkt $(\frac{x^*}{2}, y^*)$ osiąga oś x w punkcie $(x^*, 0)$.

Rozważmy teraz równolegle z układem (1^*) układ

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{y(s)} \qquad y(x) = y_0 - \int_{x_0}^{x} \left[f(s) + \frac{g(s)}{y(s)} \right] ds. \tag{3}$$

Dla każdego warunku początkowego $t(x_0) = t_0$ $y(x_0) = y_0$, gdzie $y_0 \neq 0$ x_0 i t_0 - dowolne, układ (3) ma rozwiązanie, które otrzymamy znajdując najpierw rozwiązanie $y(x)$ drugiego z równań układu (3), a następnie rozwiązanie $t(x)$ pierwszego z tych równań.

Łatwo widać, że jeżeli $x(t)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $t(x)$, [taka $x(t)$ istnieje, bo gdy $y>0$, to $t(x)$ rosnąca, a gdy $y<0$, to $t(x)$ malejąca], to $x(t)$, $y(t) = y[x(t)]$ jest rozwiązaniem układu (1^*). Załóżmy, że $y(x)>0$. Jeżeli przy tym $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) = 0$, to istnieje $t^*<+\infty$ takie, że $\lim\limits_{t\to t^*-0} y(t) = 0$. Oczywiście, że ta granica istnieje, chodzi tylko o to, czy t^* nie równa się $+\infty$. Gdyby $t^* = +\infty$, to byłoby $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$ i w walcu S określonym nierównościami: $\frac{x^*}{2}<x<x^*$, $0<y<\frac{c_1}{2M}$, t - dowolne, gdzie c_1 i M takie, że w przedziale $<\frac{x^*}{2}, x^*>$ jest $|f(x)|<M$ i $g(x)>c_1$ mielibyśmy dla $t>T$, gdzie T dostatecznie duże,

$$f[x(t)] \cdot y(t) + g[x(t)] \geq \frac{c_1}{2}$$

i wobec tego w drugim z równań układu (1^*) prawa strona przy $t\to+\infty$ dążyłaby do $-\infty$ i nie mogłoby być $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Istnieje więc $t^*<+\infty$ takie, że $y(t^*) = 0$. Znaczy to, że istnieje rozwiązanie układu (1^*), którego trajektoria zawiera $y^+(x)$ i punkt $(x^*, 0)$.

Analogiczne rozumowanie zastosowane do rozwiązania układu (1^*) odpowiadającego rozwiązaniu $y^-(x)$ drugiego z równań układu (3), które osiąga oś O_x w punkcie $(x^*, 0)$ wykazuje, że istnieje rozwiązanie $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ układu (1^*) którego trajektoria zawiera $y^-(x)$ i punkt $(x^*, 0)$.

Jeżeli jest $\tilde{x}(t_1) = x_1$, $\tilde{y}(t_1) = y_1<0$ i $\tilde{y}(t^{**}) = 0$ i oczywiście $\tilde{x}(t^{**}) = x^*$, to zmieniając t na $t + t^* - t^{**}$ uzyskujemy rozwiązanie $\check{x}(t)$, $\check{y}(t)$ układu (1^*) takie, że dla $t_2 = t_1 + t^* - t^{**}$ jest $\check{x}(t_2) = x_1$, $\check{y}(t_2) = y_1$ i $\check{x}(t^*) = x^*$, $\check{y}(t^*) = 0$ i rozwiązanie układu (1^*) zesztukowane z $[x(t), y(t)]$ oraz $[\check{x}(t), \check{y}(t)]$ będzie miało trajektorię zawierającą całki $y^+(x)$, $y^-(x)$ równania (2^*) i punkt $(x^*, 0)$.

W ten sposób wykazaliśmy równocześnie, że układ (1^*) posiada także rozwiązanie dla każdego warunku początkowego postaci $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = 0$, $x_0 > 0$. Analogicznie rzecz się ma, gdy $x_0< 0$ i wobec tego układ (1^*) posiada (w sensie lokalnym) rozwiązanie dla każdego warunku początkowego, za wyjątkiem ewentualnie przypadku, gdy $x_0 = y_0 = 0$ oraz że rozwiązanie takie wysycone w prawo wychodzi poza każdy kompakt, w szczególności poza każdy walec $|x|< a$, $|y| < b$ $t_0< t < T$.

Uwaga

Mówimy tylko o przedłużaniu w prawo rozwiązań układu (1^*) ponieważ jak to już zaznaczyliśmy mogą istnieć rozwiązania, które wysycone w lewo zdążają do osi t.

Zauważmy, że z układu (3) wynika, że funkcje $t(x)$ i $y(x)$ są bezwzględnie całkowalne i spełniają prawie wszędzie, dokładniej poza ewentualnie zbiorem miary Lebesque'a równej zeru, układ równań różniczkowych:

$$t'(x) = y \qquad y'(x) = -f(x) - \frac{g(x)}{y}$$

rozważany w półprzestrzeni D^+, gdzie $y>0$ $t>t_0$ x - dowolne lub D^-, gdzie $y<0$, $t>t_0$, x - dowolne.

Ze związku między układami (3) i (1^*) oraz z przeprowadzonych już rozważań dotyczących rozwiązalności i przedłużalności rozwiązań układu (1^*), a także z uwagi na to, że transformacja x t(x) jest ciągła (a nawet klasy C^1) wynika, że rozwiązania układu (1^*) poza ewentualnie zbiorem miary zero spełniają układ równań (1). Wyniku tego nie można uzyskać przez bezpośrednie zastosowanie twierdzenia Caratheodory'ego do układu (1), ponieważ układ ten poza najprostszym przypadkiem, gdy f(x) i g(x) są ciągłe, a w którym istnieją rozwiązania w zwykłym sensie, nie spełnia założeń tego twierdzenia.

Twierdzenie Caratheodory'ego nie gwarantuje także jednoznaczności rozwiązań.

LITERATURA

[1] Коддингтон Э., Левинсон Н.: Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Издательство Иностранной Литературы, Москва 1958.

[2] Хартман Ф.:Обыкновенные дифференциальные уравнения, Издательство "Мир" Москва 1970.

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛИЕНАРА

Р е з ю м е

При некоторых предпосылках, напоминающих предпосылки Каратеодори, хотя существенно от них отличающихся, показывается существование, однозначность и возможность продолжения решений уравнения Лиенара.

ABOUT THE SOLUTIONS OF LIÉNARD'S EQUALION

S u m m a r y

Under certain assumptions resembling Caratheodory's assumptions, though differing essentially from them, the existence, synonymity and continuation of Lienard's solutions is proved.