ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Andrzej FLISOWSKI

O NAWIJANIU SIĘ ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA LIÉNARDA

Streszczenie. W pracy określone zostały warunki na "nawijanie się" a przy nawijaniu na "zbliżanie się" czy "oddalanie się" trajektorii równania Liénarda. Daje to podstawę do formułowania twierdzeń o istnieniu obwodu czy walca, przez który całki równania Liénarda nie wychodzą.

Intuicyjnie oczywiste pojęcie "nawijania się" trajektorii zostało zdefiniowane w pracach [2], [3]. W pracy tej zajmiemy się bliżej nawijaniem się trajektorii równania Liénarda. Ponieważ przeprowadzone rozważania wiążą się dość ściśle z wynikami pracy [1], więc kontynuujemy dalej przyjętą tam numerację wzorów. Tak więc numery (1) - (3) dotyczą wzorów z pracy [1], (o czym nie będę dalej wspominał), natomiast numerację wzorów tej pracy rozpoczynam od (4). Równanie Liénarda jest także równoważne układowi

$$\dot{x} = \hat{y} - F(x) \qquad \dot{\hat{y}} = -g(x), \tag{4}$$

który, jak zobaczymy, w pewnych rozważaniach będzie wygodniejszy od układu (1).

Rozwiązania układu (4) rozumiemy w sensie uogólnionym, jak w przypadku układu (1). Podobnie jak w [1] części trajektorii tego układu są w obszarach płaszczyzny x, $\hat{y}$ spełniających warunek $\hat{y} \neq F(x)$ rozwiązaniami równania:

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{g(s)}{\hat{y}(s) - F[x(s)]}\, ds \tag{5*}$$

Między częściami trajektorii układów (1) i (4) będących rozwiązaniami odpowiednio równań (2*) i (5*) zachodzi odpowiedniość

$$y(x) = \hat{y}(x) - F(x), \tag{6}$$

gdzie $y(x)$ trajektoria układu (1) a $\hat{y}(x)$ trajektoria układu (4).

Ponieważ $F(0) = 0$, a zatem $\hat{y}(0) = y(0)$, to takie własności odpowiadających sobie trajektorii obu układów, jak ograniczoność w przedziałach skończonych, nawijanie się dokoła początku układu, czy istnienie obwodu zawierającego wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie [odpowiadające rosnącemu t] nie wychodzą - są wspólne. Ponadto, jeśli np. część trajektorii $y(x)$ zawarta w półpłaszczyźnie $y>0$ [czy $y<0$] "osiąga" oś x przy $x = x_1$, to odpowiadająca jej część trajektorii $\hat{y}(x)$ jest zawarta w obszarze, gdzie $\hat{y} > F(x)$ [$\hat{y} < F(x)$] i osiąga przy $x = x_1$ krzywą $\hat{y} = F(x)$.

Z równań (4) - (5*) jest od razu widoczne, że jeżeli $\hat{y}(x)$ jest trajektorią wychodzącą w prawo z punktu $(x_0, \hat{y}_0)$, $x_0<0$, $\hat{y}_0 > F(x_0)$ to $\hat{y}(x)$ rośnie w przedziale $<x_0, 0>$ i dla $x_0<x<0$ jest $\hat{y}(x)> F(x)$, wobec czego z założenia 2° Hipotezy H z pracy [1] jest $\hat{y}(0) > 0$.

W dalszym biegu, dla $x>0$ $\hat{y}(x)$ maleje. Podobnie ma się rzecz z trajektorią $\hat{y}(x)$ wychodzącą w lewo z $(x_0, \hat{y}_0)$, $x_0>0$, $\hat{y}_0<F(x_0)$. Osiąga ona oś $\hat{y}$ tak, że $\hat{y}(0)<0$ i w dalszym biegu, dla $x<0$, rośnie. Wynika stąd oraz z odpowiedniości (6), że jeżeli chodzi o całą trajektorię $x = x(t)$ $y = y(t)$ odpowiadającą półcałce prawej układu (1*), to trajektoria taka bądź nawija się dokoła początku układu współrzędnych, bądź od pewnego t jest $y(t)>0$ i $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, bądź wreszcie od pewnego t jest $y(t)<0$ i $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$. W drugim z tych trzech przypadków istnieje oczywiście takie t_1, że $x(t_1) = 0$ i $y(t)>0$ dla $t\geq t_1$ i ta część trajektorii [dla $t\geq t_1$] da się przedstawić równaniem $y = y(x)$, a ponieważ $y(x) = \hat{y}(x) - F(x)$ i dla $x\geq 0$ $\hat{y}(x)$ maleje, to

$$y(x) < y(0) - F(x) \quad \text{dla} \quad x>0 \tag{7}$$

Podobnie w przypadku trzecim jest $y(x)<0$ dla $x<0$ i

$$y(x) > y(o) - F(x) \quad \text{dla} \quad x<0 \tag{8}$$

Z tych związków wynika w dalszym ciągu, że trajektoria wychodząca z punktu (x_0, y_0), $y_0>0$, osiągnie dodatnią część osi x, jeżeli będzie $\sup\limits_{x\geq 0} F(x) \geq y(0)$, a trajektoria wychodząca w lewo z punktu (x_0, y_0), $y_0 < 0$ osiągnie ujemną część osi x, jeżeli $\inf\limits_{x\leq 0} F(x)\leq y(0)$. W szczególności otrzymujemy stąd warunek wystarczający na to, by wszystkie trajektorie odpowiadające półcałkom prawym układu (1*) nawijały się dokoła początku układu w postaci:

$$\sup_{x\geq 0} F(x) = +\infty \tag{9}$$

oraz

$$\inf_{x\leq 0} F(x) = -\infty$$

Oczywiście wszystkie te rozważania prowadzimy przy założeniu, że spełnione są założenia Hipotezy H występującej w pracy [1].

Pierwszy ze związków (9) jest równocześnie warunkiem na to, by trajektoria wychodząca z (x_0, y_0) $y_0>0$ lub $y_0 = 0$ lecz $x_0<0$ osiągała w prawo dodatnią część osi x, a drugi warunkiem na to, by trajektoria wychodząca w lewo z (x_0, y_0) $y_0<0$ lub $y_0 = 0$ lecz $x_0>0$, osiągała ujemną część osi x.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika jeszcze, że dla żadnej trajektorii odpowiadającej półcałce prawej układu (1^*) nie może być $\lim_{t\to T} x(t) = \bar{x}$ $|\bar{x}|<+\infty$ i równocześnie $\sup |y(t)| = +\infty$ i to ani przy T skończonym ani gdy $T = +\infty$.

Podamy teraz kilka uwag, z których otrzymamy warunek już nie tylko wystarczający, ale i konieczny na to, by trajektorie prawe układu (1^*) nawijały się dokoła początku układu współrzędnych.

Uwaga 1

Jeżeli $\sup\limits_{x\geq x_0} \int\limits_{x_0}^{x} [f(s) + g(s)]\, ds< M$, gdzie $0<M<+\infty$ i $y_0>1 + M$, to całka równania (2) wychodząca w prawo z punktu (x_0, y_0), $x_0 \geq 0$ nie osiąga osi 0_{x_+}.

Uzasadnienie

Dla $y\geq 1$ i $x\geq x_0$ otrzymujemy z (2^*)

$$y(x)\geq y(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} [f(s) + g(s)]\, ds> 1 + M - M = 1$$

W podobny sposób wykazuje się, że

jeżeli $\sup\limits_{x\leq x_0} \int\limits_{x_0}^{x} [-f(s) + g(s)]\, ds\leq M$, gdzie $0<M<+\infty$, a $y_0<- 1 - M$, to całka równania (2) wychodząca w lewo z punktu (x_0, y_0), $x_0< 0$ nie osiąga osi 0_{x_-}.

Uwaga 2

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by całka równania (2) wychodząca w prawo z dowolnego punktu (x_0, y_0), $y_0>0$, osiągała oś 0_{x_+}, jest aby $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ lub $\limsup\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Uzasadnienie

Warunek konieczny wynika przez kontrapozycję z uwagi 1, natomiast warunek dostateczny z następującego rozumowania. Przypadek, gdy $\sup\limits_{x>0} F(x)= +\infty$ [co w naszym przypadku jest równoważne z tym, że $\limsup\limits_{x\to+\infty} F(x)= +\infty$, bo $F(x)$ ograniczone w każdym przedziale skończonym wynika, jak to już objaśniliśmy wcześniej, ze związku (7).

Jeśli natomiast $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, to z ($5^*$) wynika, że dla dowolnego x_0 i $\bar{y}(x_0)> y(x_0) + F(x_0)$ jest

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(x_0) - \int_{x_0}^{0} \frac{g(s)}{\hat{y}(s) - F[x(s)]} ds - \int_{0}^{x} \frac{g(s)}{\hat{y}(s) - F[x(s)]} ds$$

i wobec tego, że dla $x>0$ $\hat{y}(x)$ maleje, mamy dla $x>0$

$$\hat{y}(x) < \hat{y}(0) - \int_0^x \frac{g(s)}{\hat{y}(0) - J} ds = \hat{y}(0) - \frac{G(x)}{\hat{y}(0) - J}$$

tak długo, jak długo $\hat{y}(x) - F(x) > 0$. Wobec $G(x) \to +\infty$ prowadzi to do sprzeczności z założeniem, że $\hat{y}(x) > F(x) > J$ dla dowolnych $x>0$. Wobec związku (6) oznacza to, że $y(x)$ osiąga w prawo oś 0_{x_+}.

W podobny sposób wykazujemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by całki równania (2) wychodzące w lewo z dowolnego punktu $(x_0\ y_0)$, $y_0 < 0$, osiągały oś 0_{x_-} jest, aby $\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$ lub $\liminf_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

Z uwagi 2 wynika, że koniunkcja alternatyw

$$\limsup_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$$

oraz

$$\liminf_{x\to-\infty} F(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$$

stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, by trajektorie prawe układu (1*) poza rozwiązaniem osobliwym (o ile takie istnieje) nawijały się dokoła początku układu. Wynik ten formułujemy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie I

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy H występującej w pracy [1] oraz jeden z następujących warunków

α) $\limsup_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ i $\liminf_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

β) $\limsup_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$

γ) $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ i $\liminf_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

δ) $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$

to trajektorie prawe układu (1*) poza punktem osobliwym nawijają się dokoła początku układu.

Łatwo wykazać, że (przy założeniach Hipotezy H z [1]) warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia obwodu, przez który trajektorie układu (1*) nie wychodzą, jest istnienie trajektorii prawej układu (1*), która się nawija dokoło początku układu i to w ten sposób, że z dwóch kolejnych jej punktów przecięcia się z dodatnią częścią osi y drugi będzie leżał bliżej początku układu. O takich trajektoriach będziemy mówili, że się zbliżają do początku układu. Znaczy to po pierwsze, że samo nawijanie się trajektorii nie wystarcza do istnienia szukanego obwodu, a z drugiej strony, że do tego nie jest potrzebne nawijanie się wszystkich (poza punktem osobliwym) trajektorii. Wiążą się z tym następujące rozważania.

Oznaczmy przez $y^+(x, -\alpha)$ półcałkę równania (2^*) wychodzącą z punktu $(-\alpha, 0)$, $\alpha>0$ w prawo i zawartą w półpłaszczyźnie $\mathcal{T}^+$: $y>0$. Rzędną punktu, w którym ona osiąga oś 0_{y_+}, oznaczmy $y^+(0, -\alpha)$. Podobnie przez $y^-(x, \alpha)$ oznaczamy półcałkę równania (2^*) wychodzącą w lewo z punktu $(0, \alpha)$ i zawartą w półpłaszczyźnie $\mathcal{T}^-$: $y<0$, oraz rzędną punktu, w którym ona osiąga oś 0_{y_-} przez $y^-(0, \alpha)$. Jeżeli spełnione są założenia hipotezy z [1], to półcałki te osiągają oś 0_y, przy czym funkcja $y^+(0, -\alpha)$ jest rosnąca, a funkcja $y^-(0, \alpha)$ jest malejąca ze względu na α. Istnieją więc granice $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} y^+(0, -\alpha) = K$ i $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} y^-(0, \alpha) = L$ skończone lub nieskończone.

Aby było $K<+\infty$ wystarczy na przykład, by istniały liczby dodatnie M i c, takie by dla $x<-c$ były spełnione nierówności $f(x)>0$ i $-g(x)<M\cdot f(x)$ i podobnie na to, by było $L>-\infty$ wystarczy, by dla $x>c$ było $f(x)>0$ oraz $g(x)<M\cdot f(x)$. Jeżeli te nierówności są spełnione, to dla każdego $\alpha>c$ jest

$$y^+(x, -\alpha)<M \quad \text{dla} \quad x<-c$$
$$\text{i} \; -M<y^-(x, \alpha) \quad \text{dla} \quad x>c$$

Wynika to stąd, że prawa strona równania (2) jest na odcinku $y = M$, $x<-c$ jak również na odcinku $y = -M$, $x>c$ niedodatnia, co przy założeniach Hipotezy H występującej w pracy [1], pozwala zastosować znaną nierówność różniczkową, w wyniku czego otrzymamy $y^+(-c, -\alpha)\leq M$ i $y^-(c, \alpha)\geq -M$. W rzeczywistości otrzymane nierówności, jak łatwo widać, muszą być ostre. (Wynika to stąd, że $y^+(-c, -\alpha)$ podobnie jak $y^+(0, -\alpha)$ nie maleje). Z ograniczoności funkcji $f(x)$ i $g(x)$ w przedziale $\langle -c, c\rangle$ i z jednoznaczności trajektorii wynika więc, że dla każdego $\alpha>0$ półcałka $y^+(x, -\alpha)$ osiąga oś 0_{y_+} poniżej całki wychodzącej z $(-c, M)$, a półcałka $y^-(x, \alpha)$ osiąga oś 0_{y_-} powyżej całki wychodzącej z $(c, -M)$.

Jak widać, przy odpowiednich założeniach liczby K i L są skończone i można je oszacować pierwszą z góry, a drugą z dołu na różne sposoby. Podaję przykłady takich oszacowań:

<u>Oszacowanie liczby K</u>

Załóżmy, że spełnione są założenia Hipotezy H występującej w pracy [1] i $G(-\infty)<+\infty$. Wówczas $K<K_0 = H + 2\sqrt{G(-\infty)}$, gdzie H oznacza liczbę określoną w założeniu 4^0 Hipotezy H z [1].

Uzasadnienie

Niech M oznacza dowolną liczbę dodatnią. Całka równania (2^*) wychodząca z dowolnego punktu $(-\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, osiąga oś O_y, pozostając cały czas poniżej prostej $y = M$, lub ostatni raz przecina ją w punkcie o odciętej x_0, pozostając dalej już ponad tą prostą. Wówczas dla $x_0 < x < 0$ mamy:

$$y(x) < y(x_0) - F(x) + F(x_0) - \frac{1}{M}\left(G(x) - G(x_0)\right)$$

Stąd i z założenia 4° Hipotezy H z [1] otrzymujemy

$$y(0) < M + H + \frac{1}{M} G(x_0) < H + M + \frac{1}{M} G(-\infty)$$

Funkcja ta osiąga minimum przy $M = \sqrt{G(-\infty)}$, a wobec tego $y(0) < H + 2\sqrt{G(-\infty)}$.

Jest więc $K < K_0 = H + 2\sqrt{G(-\infty)}$.

Oszacowanie liczby L

W analogiczny sposób przy założeniu, że $G(+\infty) < +\infty$ otrzymujemy $L > L_0 = J - 2\sqrt{G(+\infty)}$, gdzie J oznacza liczbę określoną w założeniu 4° Hipotezy H z [1].

Uwaga 3

Z podanych oszacowań oraz z tego, co powiedziano wcześniej wynika, że warunkiem wystarczającym na to by było $K < +\infty$ jest, by $G(-\infty) < +\infty$, lub by istniały liczby $c > 0$, $M > 0$ takie, że dla $x < -c$ zachodzi $-g(x) < M \cdot f(x)$. Podobnie warunkiem wystarczającym na to by było $L > -\infty$ jest, by było $G(+\infty) < +\infty$, lub by dla $x > c$ było $g(x) < M : f(x)$.

LITERATURA

[1] Flisowski A.: O rozwiązaniach równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

[2] Kluczny Cz.: O pewnych warunkach stabilności dla równania różniczkowego $x'' + f(x, x') = 0$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka, 11, 1966.

[3] Kluczny Cz., Flisowski A.: O rozwiązaniach okresowych równania różniczkowego $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka, 15, 1970.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛИЕНАРА

Резюме

В работе определяются условия "наматывания", а при наматывании - "сближения" или же "отдаления" траекторий уравнения Лиенара. Это даёт основание для формулировки теорем о существовании контура, или цилиндра, через который интегралы уравнения Лиенара не выходят.

ABOUT THE LIMITATIONS OF SOLUTIONS OF LIÉNARD'S EQUATION

Summary

In this paper there have been defined the conditions for "reeling" and when reeling - for "approaching" or "withdrawal" of the trajectory of Liénard's equation.

It gives the basis to formulate theorems about the existence of a periphery or a cylinder, beyond which the integrals of Liénard's equation do not go out.