ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Andrzej FLISOWSKI

O WŁASNOŚCIACH ASYMPTOTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA LIÉNARDA

Streszczenie. W pracy sformułujemy twierdzenia dotyczące istnienia obwodu, przez który trajektorie układu odpowiadającego równaniu Liénarda nie wychodzą. Dodając założenie, że początek układu nie jest punktem przyciągania, otrzymujemy z uzyskanych twierdzeń - twierdzenia o istnieniu rozwiązania okresowego.

Przeprowadzone rozważania wiążą się ściśle z wynikami prac [1], [2]. W związku z tym przyjmujemy, że czytelnikowi znane są przyjęte tam oznaczenia. Numery (1) - (3) odpowiadają odpowiednim wzorom z pracy [1], natomiast numery (4) - (9) wzorom z pracy [2].

Zauważmy, że niewychodzenie trajektorii układu (1) przez obwód K na zewnątrz K jest oczywiście równoważne niewychodzeniu rozwiązań tego układu przez powierzchnię walcową S o kierownicy K i tworzących równoległych do osi t.

Hipoteza 1

1. Spełnione są założenia Hipotezy H z pracy [1].
2. Istnieje $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} y^+(0, -\alpha) = K < +\infty$.
3. Trajektoria układu (1) wychodząca z punktu $(0, K)$ osiąga przy t rosnącym osie O_{x+}, a następnie O_{x-}.

Warunki wystarczające dla zachodzenia założenia 2 Hipotezy 1 podaje uwaga 3 z pracy [2], natomiast z rozważań rozpoczynających prace [2] oraz z uwagi 2 z [2] wynika, że założenie 3 będzie spełnione, gdy $\sup\limits_{x>0} F(x) > K$ oraz $\left(\lim\limits_{x\to -\infty} G(x) = +\infty \text{ lub } \liminf\limits_{x\to -\infty} F(x) = -\infty\right)$

Twierdzenie 1

Jeżeli spełnione są założenia hipotezy 1, to w płaszczyźnie xy istnieje obwód (krzywa Jordana) zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Dowód

Trajektoria układu (1) wychodząca z punktu $P(0, K)$ osiąga dla rosnących wartości t kolejno osie O_{x_+}, O_{y_-}, O_{x_-} i znów O_{y_+} w punkcie $P_1(0, K_1)$, przy czym $K_1 < K_0$. Trajektoria ta wraz z odcinkiem PP_1 tworzy szukany obwód.

Hipoteza 2

1/ Spełnione są założenia Hipotezy H z pracy [1].

2/ Istnieje $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} y^{-}(0, \alpha) = L > -\infty$.

3/ Trajektoria układu (1) przechodząca przez punkt $(0, L)$, osiąga przy t rosnącym osie 0_{x_-}, 0_{y_+} a następnie 0_{x_+}.

Warunki wystarczające dla zachodzenia założenia 2/ Hipotezy 2 podaje uwaga 3 z [2], natomiast z rozważań rozpoczynających [2] oraz uwagi 2 wynika, że założenie 3/ będzie spełnione, gdy $\inf\limits_{x<0} F(x) < L$ oraz $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty \text{ lub } \limsup\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\right)$

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy 2, to w płaszczyźnie $x\,y$ istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Dowód

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 1 przeprowadzamy przez punkt $(0, L)$ trajektorię, która po okrążeniu punktu $(0, 0)$ osiąga ponownie oś 0_{y_-} w punkcie położonym nad punktem $(0, L)$, stanowiąc wraz z odpowiednim odcinkiem osi 0_{y_-} szukany obwód.

Hipoteza 3

1. Spełnione są założenia Hipotezy H z pracy [1].

2. Istnieje $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} y^{+}(0, -\alpha) = K < +\infty$ oraz $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} y^{-}(0, \alpha) = L > -\infty$.

3. Trajektoria układu (1) przechodząca przez punkt $(0, K)$ osiąga przy t rosnącym oś 0_{x_+}, a trajektoria przechodząca przez punkt $(0, L)$, osiąga przy t rosnącym oś 0_{x_-}.

Warunki wystarczające dla zachodzenia założenia 2 Hipotezy 3, podaje uwaga 3 z [2], natomiast założenie 3 będzie spełnione, jeśli $\sup\limits_{x>0} F(x) > K$ i $\inf\limits_{x<0} F(x) < L$

Twierdzenie 3

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy 3, to w płaszczyźnie $x\,y$ istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Dowód

Trajektoria układu (1) przechodząca przez punkt $P(0, K)$ osiąga przy t rosnącym kolejno osie 0_{x_+}, 0_{y_-}, 0_{x_-} i znów 0_{y_+} w punkcie $P_1\ (0, K_1)$ takim, że $K_1 < K$. Trajektoria ta wraz z odcinkiem PP_1 tworzy szukany obwód.

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy H z [1], oraz $G(-\infty)<+\infty$, $\sup\limits_{x>0} F(x)>H + 2\sqrt{G(-\infty)}$ i $\liminf\limits_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$, to w płaszczyźnie x, y istnieje obwód (krzywa Jordana) zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Uzasadnienie

Wniosek wynika z oszacowania liczby K : $K<K_0 = H + 2\sqrt{G(-\infty)}$ oraz zastosowania spostrzeżeń uczynionych po Hipotezie 1 do Twierdzenia 1.

W podobny sposób z oszacowania liczby L : $L>L_0 = J - 2\sqrt{G(+\infty)}$ wynika:

Wniosek 2

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy H z [1] oraz $G(+\infty)<+\infty$, $\inf\limits_{x<0} F(x)<J - \sqrt{G(+\infty)}$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup F(x) = +\infty$, to w płaszczyźnie x y istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Z dwóch powyższych wniosków oraz Twierdzenia 3 wynika

Wniosek 3

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy z [1] oraz $G(+\infty)<+\infty$, $G(-\infty)<+\infty$, $\sup\limits_{x>0} F(x)>H + 2\sqrt{G(-\infty)}$ i $\inf\limits_{x<0} F(x)< J - 2\sqrt{G(+\infty)}$, to w płaszczyźnie xy istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Twierdzenie 1 - 3 można zastąpić w pewnym stopniu jednym twierdzeniem, które chociaż rozstrzyga w mniejszej liczbie przypadków, to jednak ma tę zaletę, że w jego sformułowaniu nie występują warunki dotyczące osiągnięcia osi O_x z punktów (0, K) i (0, L) a mianowicie:

Twierdzenie A

Jeżeli: α) spełnione są założenia Twierdzenia I z pracy [2], a ponadto

β) $K< +\infty$ lub $L> -\infty$

to w płaszczyźnie xy istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Z uwagi 3 wynika, że warunek β będzie spełniony, jeśli jest spełniony jeden z następujących czterech warunków:

β_1) $G(-\infty) < +\infty$,

β_2) $-g(x)< M \cdot f(x)$ dla $x< -c$,

β_3) $G(+\infty) < +\infty$,

β_4) $g(x)< M \cdot f(x)$ dla $x\geq c$,

gdzie M i c pewne liczby dodatnie.

Przykład 1

Rozpatrzmy równanie Van-der Pola

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0$$

Przy każdym $\mu>0$ dla $x<-2$ jest $-g(x)<\frac{2}{3\mu}\cdot f(x)$ oraz $G(\pm\infty) = +\infty$, a więc spełnione są założenia Twierdzenia A. (Ponieważ dla $x>2$ zachodzi $g(x)\leq\frac{2}{3\mu}\cdot f(x)$ oraz $G(\pm\infty) = +\infty$, więc równanie to spełnia też założenia twierdzenia 2).

Przykład 2

Przyjmijmy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2} & \text{dla } x<-1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } -1<x<1 \\ \frac{5}{x^2} & \text{dla } 1<x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{dla } x<-1 \\ x & \text{dla } -1<x<1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{dla } 1<x \end{cases}$$

Układ (1) z tak określonymi funkcjami $f(x)$ i $g(x)$ spełnia założenie Hipotezy H z [1]. Ponieważ $H = \frac{2}{3}$, $J = -\frac{2}{3}$, $G(\pm\infty) = \frac{3}{2}$, więc z oszacowań liczb K i L wynika istnienie liczb $L_0 = -\frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} > -3\frac{1}{6}$ i $L > L_0$ oraz $K<K_0<3\frac{1}{6}$. Z rozważań rozpoczynających pracę [2] wynika, że całki równania (2) przechodzące przez punkty (0, K) i (0, L) osiągają pierwsza w prawo oś 0_{x_+}, druga w lewo oś 0_{x_-}, bo $\sup\limits_{x>0} F(x) = 4\frac{1}{3}$ a $\inf\limits_{x<0} F(x) = -4\frac{1}{3}$.

Spełnione są więc założenia wniosku 2. Łatwo jednak widać, że nie są spełnione założenia twierdzenia A, gdyż z uwagi 1 wynika, że całki wychodzące w prawo z punktów (x_0, y_0), gdzie $x_0>0$ i $y_0>7\frac{1}{2}$ nie osiągają osi 0_{x_+} i podobnie całki wychodzące w lewo z punktów $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$, gdzie $\hat{x}_0<0$ i $\hat{y}_0<-7\frac{1}{2}$ nie osiągają osi 0_{x_-}.

Na koniec podajmy twierdzenie dotyczące przypadku, którego dotyczy większość prac znanych w literaturze zagadnienia, którym się zajmujemy.

Twierdzenie 4

Jeżeli:

1) są spełnione założenia Hipotezy H z pracy [1],

2) trajektorie układu (1) nawijają się dokoła początku układu,

3) $\liminf_{x \to +\infty} F(x) - \limsup_{x \to -\infty} F(x) > \varepsilon > 0$,

to w płaszczyźnie xy istnieje obwód (krzywa Jordana), zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Dowód twierdzenia 4 poprzedzimy dwoma uwagami oraz dwoma lematami.

Uwaga 4

Z założenia Hipotezy H z [1] wynika ciągłość funkcji $F(x)$, a z założenia 3 sformułowanego wyżej twierdzenia istnienie liczb a i b, $a<b$ takich, że $F(b) - F(a) = \varepsilon$ oraz $F(x) \leq F(a)$ dla $x \leq a$ i $F(x) \geq F(b)$ dla $x \geq b$.

Uzasadnienie

Połóżmy $\liminf_{x \to +\infty} F(x) = \beta$, $\limsup_{x \to -\infty} F(x) = \alpha$ oraz $\varepsilon_1 = \frac{\beta - \alpha - \varepsilon}{2}$. Ponieważ funkcja $F(x)$ jest ciągła wszędzie, to $(\alpha, \beta) \subset F(X)$, gdzie $X = (-\infty, +\infty)$, a że $\alpha < \alpha + \varepsilon_1 < \beta - \varepsilon_1 < \beta$, to wystarczy przyjąć za a najmniejszą z liczb u, dla których $F(u) = \alpha + \varepsilon_1$, a za b największą z tych, dla których $F(u) = \beta - \varepsilon_1$. Będzie $a<b$, ponadto $F(b) - F(a) = \beta - \alpha - 2\varepsilon_1 = \varepsilon$ oraz $F(x) \leq F(a)$ dla $x \leq a$ i $F(x) \geq F(b)$ dla $x \geq b$. Ponieważ nie zakładaliśmy, że $\beta > 0$ i $\alpha < 0$, to w ogólnym przypadku liczby a i b mogą być tego samego znaku.

Uwaga 5

Z założeń Hipotezy H z [1] wynika też, że $J < \liminf_{x \to +\infty} F(x)$ oraz $\limsup_{x \to -\infty} F(x) < H$.

Jeśli $\liminf_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, a $\limsup_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$, to założenie 3 twierdzenia 4 jest spełnione przy dowolnym $\varepsilon > 0$. Za liczby β i α, o których mowa w uzasadnieniu uwagi 4, dobieramy wówczas liczby odpowiednio duże, co do wartości bezwzględnej. Podobnie postępujemy, gdy tylko jedna z tych granic jest niewłaściwa.

Lemat 1

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają w $\langle a, b \rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$ założenie 1° Hipotezy H z [1], a M oznacza dowolną liczbę rzeczywistą dodatnią, to istnieją rozwiązania równania (2), które oznaczam symbolami $y^+ = y^+(x)$, $y^- = y^-(x)$ spełniające w przedziale $\langle a, b \rangle$ warunki $y^+(x) > M$, $y^-(x) < -M$,

Dowód

Zgodnie z wcześniejszą umową będziemy rozwiązanie równania (2) rozumieli w sensie uogólnionym jako rozwiązanie równania (2^*).

Ponieważ funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ograniczone w $\langle a, b \rangle$, to istnieją liczby dodatnie α i β takie, że w $\langle a, b \rangle$ jest: $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$ i $-\beta \leq g(x) \leq \beta$, a zatem dla $|y| \geq 1$ mamy w $\langle a, b \rangle$: $-\alpha - \beta \leq -f(x) - \frac{g(x)}{y} \leq \alpha + \beta$.

Oznaczmy $\gamma_0 = (b-a)\cdot(\alpha+\beta) + M + 1$. Jeżeli $\gamma > \gamma_0$, to łatwo widać, że rozwiązanie równania (2) wychodzące z punktu (a, γ) spełnia warunki żądane dla $y^+(x)$, a rozwiązanie tego równania wychodzące z punktu $(a, -\gamma)$, spełnia warunki żądane dla $y^-(x)$. c.n.d.

Lemat 2

Jeżeli jest spełnione założenie 1° Hipotezy H z [1], a ponadto jest $F(b) - F(a) > \varepsilon > 0$, to dla dowolnego $M > 0$ istnieją rozwiązania $y^+(x)$ i $y^-(x)$ równania (2) określone w $\langle a, b\rangle$ takie, że

$$y^+(x) > M \quad \text{w } \langle a, b\rangle \quad \text{oraz} \quad y^+(a) - \frac{\varepsilon}{2} > y^+(b)$$

$$y^-(x) < -M \quad \text{w } \langle a, b\rangle \quad \text{oraz} \quad y^-(a) > y^-(b) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dowód

Połóżmy $\Theta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ i obierzmy liczbę $M_1 \geq M$ tak, by było $M_1 \cdot \Theta \geq |g(x)|$ w $\langle a, b\rangle$ i połóżmy $\gamma_1 = (b-a)\cdot(\alpha+\beta) + M_1 + 1$. Rozwiązanie $y^+(x)$ równania (2) wychodzące w prawo z punktu (a, γ), $\gamma > \gamma_1$, spełnia w $\langle a, b\rangle$ związek $y(x) \geq M_1 + 1$, wobec czego z (2*) mamy $y^+(b) \leq y^+(a) - F(b) + F(a) + (b-a)\cdot\Theta \leq y^+(a) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = y^+(a) - \frac{\varepsilon}{2}$, co dowodzi pierwszą część lematu 2. Dowód drugiej części lematu jest analogiczny.

Uwaga 6

Rozwiązania $y^+(x)$ i $y^-(x)$, o których mowa w lemacie 2 można tak dobrać, by był spełniony związek $y^+(a) + y^-(a) = r$, gdzie r - dowolna liczba. Wówczas będzie $y^+(b) + y^-(b) \leq r - \varepsilon$.

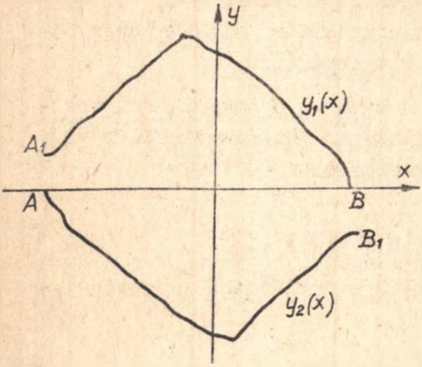
W szczególności przy założeniach lematu 2, dla dowolnego $M > 0$ można dobrać takie $y^+(x)$ i $y^-(x)$, że będą spełnione związki: $y^+(x) \geq M$, $y^-(x) \leq -M$ w $\langle a, b\rangle$ oraz $y^+(a) + y^-(a) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $y^+(b) + y^-(b) < -\frac{\varepsilon}{2}$.

Podamy obecnie dowód twierdzenia 4.

Obierzmy a i b zgodnie z uwagą 4, a następnie przedział $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$, gdzie $\bar{a} = \min(a, o)$, $\bar{b} = \max(b, o)$. Jest $\bar{a} \leq a < b \leq \bar{b}$. Zgodnie z uwagą 6, dla każdego $M > 0$ istnieją rozwiązania równania (2) $y^+(x)$ i $y^-(x)$ określone w przedziale $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ takie, że $y^+(x) > M$ i $y^-(x) < -M$ w $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ oraz $y^+(a) + y^-(a) = \frac{\varepsilon}{2}$ i $y^+(b) + y^-(b) < -\frac{\varepsilon}{2}$.

Zakładamy, że liczba M spełnia nierówność: $M \cdot \varepsilon > 2(\bar{b}-\bar{a}) \cdot |g(x)|$ w $\langle a, b\rangle$. Oznaczmy przez $y_1(x)$ przedłużenie rozwiązania $y^+(x)$ osiągające w prawo zgodnie z założeniem 2 dodatnią część osi O_x w punkcie $B(\beta, 0)$ i wysycone w lewo w obszarze π^+ oraz przez $y_2(x)$ przedłużenie rozwiązania $y^-(x)$ wysycone w prawo w obszarze π^-, które zgodnie z założeniem 2 osiąga w lewo ujemną część osi O_x w punkcie $A(\alpha, 0)$.

Połóżmy $u(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Pokażemy, że $u(x)$ jest określone w przedziale (α, β). Jest widoczne, iż przedział $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ zawiera się w przedziale (α, β). Z założeń twierdzenia wynika, że w każdym przedziale skończonym, w którym istnieje, jest $y_2(x)$ ograniczone od dołu, a więc $u(x)$ może nie



być określone w całym przedziale $\langle \bar{b}, \beta)$ tylko w tym przypadku, gdy $y_2(x)$ dąży do zera przy x dążącym do δ, gdzie $\bar{b} < \delta < \beta$.

Funkcja $u(x)$ w przedziale, w którym jest określona, spełnia równanie:

$$u(x) = u(x_0) - \int_{x_0}^{x} \left[2 f(s) + \frac{g(s) \cdot u(s)}{y_1(s) \cdot y_2(s)}\right] ds \qquad (10)$$

Rozważmy dwa przypadki w zależności od tego czy $b > 0$, czy też $b < 0$. Jeżeli $b \geq 0$, to $\bar{b} = b$ i $u(b) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ i gdy $x \to \delta$, to $u(x) \to y_1(\delta) > 0$, istniałoby więc δ' takie, że $b < \delta' < \delta$, $u(\delta') = 0$ i $u(x) < 0$ w $\langle b, \delta')$. Ponieważ $b > 0$, to $g(x) > 0$ dla $x > b$, a zatem z (10) oraz uwagi 4 wynika, że w przedziale $\langle b, \delta')$ jest $u(x) < u(b) - 2 \int_b^x f(s)\, ds < u(b) < -\frac{\varepsilon}{2}$, a więc byłoby $u(\delta') \leq -\frac{\varepsilon}{2}$, co sprzeczne jest z tym, że miało być $u(\delta') = 0$.

Jeżeli $b < 0$, to $\bar{b} = 0$ i z uwagi na to, że w przedziale $\langle b, 0 \rangle$ jest $g(x) \leq 0$ i $M \cdot \varepsilon > 2(\bar{b} - \bar{a}) \cdot |g(x)|$ a $y_1(x) > M$, otrzymujemy

$$u(x) = u(b) - \int_b^x \left[2 f(s) + \frac{g(s)}{y_1(s)} + \frac{g(s)}{y_2(s)}\right] ds <$$

$$< u(b) - \int_b^x \left[2 f(s) - \frac{\varepsilon}{2(\bar{b} - \bar{a})}\right] ds$$

a stąd

$$u(0) < u(b) + 2 F(b) + \frac{\Theta \cdot \varepsilon}{2} < 0 \quad \text{gdzie} \quad \Theta = \frac{-b}{-\bar{a}} < 1, \qquad (11)$$

bo $u(b) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ a z uwagi 4 $F(b) \leq F(0) = 0$.

W przedziale $\langle 0, \delta)$ postępujemy jak w poprzednim przypadku i z (11) otrzymujemy, że w $\langle 0, \delta')$ byłoby

$$u(x) < u(0) - 2 \int_0^x f(s)\, ds < -\frac{\varepsilon}{2} + 2 F(b) + \frac{\Theta \cdot \varepsilon}{2} - 2 F(x) \leq -\frac{\varepsilon}{2}(1 - \Theta) < 0,$$

bo z uwagi 4 jest $F(x) - F(b) \geq 0$ dla $x > b$. Zatem i w tym przypadku byłoby $u(\delta') < 0$, co daje sprzeczność. Oznacza to w szczególności, że $y_2(\beta) < 0$.

W analogiczny sposób, korzystając z uwagi 4, można wykazać istnienie funkcji $u(x)$ w przedziale $(\alpha, \bar{a}\rangle$, przy czym $y_1(\alpha) > 0$.

Oznaczmy przez A i B punkty o współrzędnych odpowiednio $[\alpha, 0]$; $[\beta, 0]$, a przez A_1 i B_1 punkty o współrzędnych odpowiednio $[\alpha, y_1(\alpha)]$; $[\beta, y_2(\beta)]$. Wykresy funkcji $y_1(x)$, $y_2(x)$ w przedziale $<\alpha, \beta>$ oraz odcinki AA_1 i BB_1 tworzą obwód, o którym mowa w twierdzeniu.

Zauważmy, że założenia 1 i 2 Twierdzenia 4 będą w szczególności spełnione, jeżeli przyjmiemy, że są spełnione założenia Twierdzenia I z [2]. Wobec tego możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie B

Jeżeli 1) spełnione są założenia Hipotezy H z pracy [1],

2) $\liminf\limits_{x \to +\infty} F(x) - \limsup\limits_{x \to -\infty} F(x) > \varepsilon > 0$, oraz jeden z następujących warunków

3a) $\limsup\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ i $\liminf\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

3b) $\limsup\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ i $G(-\infty) = +\infty$,

3c) $G(+\infty) = +\infty$ i $\liminf\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

3d) $G(+\infty) = +\infty$ i $G(-\infty) = +\infty$,

to w płaszczyźnie xy istnieje obwód (krzywa Jordana) zawierający wewnątrz początek układu współrzędnych, przez który trajektorie układu (1) nie wychodzą.

Zauważmy jeszcze, że obwód o którym mowa w twierdzeniu 4 czy w twierdzeniu B może być dowolnie duży, tzn. obejmować dowolnie duży prostokąt.

LITERATURA

[1] Flisowski A.: O rozwiązaniach równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

[2] Flisowski A.: O ograniczoności rozwiązań równania Liénarda, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka-Fizyka - numer bieżący.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛИЕНАРА

Р е з ю м е

В работе формулируются теоремы о существовании контура, через который траектории соответствующей уравнению Лиенара системы не выходят. Прибавляя предположение, что начало системы не есть точка притяжения, из приведенных теорем получаются теоремы о существовании периодического решения.

ABOUT THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF LIENARD'S EQUATION

Summary

In this paper we formulate a theorem concerning the existence of a periphery, beyond which the trajectories of the system corresponding to Lienard's equation, do not go out. Adding the assumption that the beginning of the system is not the point of attraction, from the obtained theorems we receive a theorem about the existence of periodic solution.