ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Bolesław P. WANTUŁA

O PEWNEJ CHARAKTERYZACJI GRAFÓW K-SPÓJNYCH

Streszczenie. W pracy wykazane zostało następujące twierdzenie: Jeżeli G jest grafem k-spójnym to: (*) dla każdego układu K złożonego z k+1 wierzchołków: $x_o, x_1, \ldots, x_k$ istnieje k wierzchołkowo nie przecinających się łańcuchów: $\{x_o, x_1\}, \{x_o, x_2\}, \ldots, \{x_o, x_k\}$, łączących wierzchołek x_o z pozostałymi wierzchołkami układu K. Jeżeli (G) $\geqslant 3k-2$ to (*) jest warunkiem wystarczającym aby graf G był k-spójny.

Niech G = (X, V) będzie grafem zwykłym skończonym. Wykażemy

Twierdzenie

Jeżeli graf G jest k-spójny, to: (*) dla każdego układu K złożonego z k+1 wierzchołków: $x_o, x_1, \ldots, x_k$, istnieje k wierzchołkowo nie przecinających się łańcuchów: $\{x_o, x_1\}, \{x_o, x_2\}, \ldots, \{x_o, x_k\}$, łączących wierzchołek x_o z pozostałymi wierzchołkami układu K.
Jeżeli rzG $\geqslant 3k-2$, to (*) jest warunkiem wystarczającym aby graf G był k-spójny.

Dowód

Niech graf G będzie k-spójny. Z grafu G tworzymy graf G^*, dołączając do zbioru jego wierzchołków nowy wierzchołek x^* i łącząc go krawędziami z wierzchołkami $x_1, x_2, \ldots, x_k$ układu K. Graf G jest również grafem k-spójnym, zatem z twierdzenia:

Twierdzenie (Whitney (1)): Graf G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna para jego wierzchołków jest połączona co najmniej k wierzchołkowo nie przecinającymi się łańcuchami.

- wynika, że istnieje k wierzchołkowo nie przecinających się łańcuchów łączących wierzchołek x_o z wierzchołkiem x^*.

Łańcuchy te przechodzić muszą przez wierzchołki $x_1, x_2, \ldots, x_k$ układu K - co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.
Niech teraz rzG $\geqslant 3k-2$ i niech jest spełniony warunek (*). Przypuśćmy, że G(X, V) nie jest k-spójny. Istnieje zatem zbiór R złożony z k-1 wierzchołków rozspajających G(X, V) na s komponent: $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Niech $|G_1| \geqslant |G_i|$, dla i=2,3,...,s.

Ponieważ

$$rzG_1 + rz\left(\bigcup_{i=2}^{s} G_i\right) \geq 2k-1,$$

zatem

$$rz\left(\bigcup_{i=2}^{s} G_i\right) \geq k, \quad \text{gdyż w przeciwnym razie}$$

$$rzG_1^* + rz\left(\bigcup_{i=2}^{s} G_i\right) \leq 2 \cdot rz\left(\bigcup_{i=2}^{s} G_i\right) \leq 2\,(k-1) = 2k-2.$$

Wybierzmy teraz z G_1 wierzchołek x_0, zaś ze zbioru $\bigcup_{i=2}^{s} G_i$ k wierzchołków: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Układ $k+1$ wierzchołków: $x_0, x_1, \ldots, x_k$, nie może spełniać warunku (*): k wierzchołkowo nie przecinających się łańcuchów nie może przejść przez $k-1$ wierzchołków zbioru R – co kończy dowód.

LITERATURA

[1] Whitney H.: Congruent graphs and the connectivity of graphs. – Amer. I. Math. 54 (1932).

О НЕКОТОРОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ К-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

Р е з ю м е

В работе доказывается следующая теорема: пусть – к-связный граф, тогда: (*) для всякого множества К, состоящего из к+1 вершин: $x_0, x_1, \ldots, x_k$, существует к вершинно непересекающихся цепей: $\{x_0,x_1\}, \{x_0,x_2\}, \ldots, \{x_0,x_k\}$ соединяющих вершину x_0 со всеми остальными вершинами из множества К. Если же $|G| \geq 3k-2$, то (*) является достаточным условием к-связности графа.

ON CERTAIN CHARACTERISATION OF K-CONNECTED GRAPHS

S u m m a r y

In this paper the following theorem is proved: If graph G is k-connected then: (*) for every set K composed of k+1 vertices: $x_0, x_1, \ldots, x_k$ there exist k vertex-disjoint paths: $\{x_0,x_1\}, \{x_0,x_2\}, \ldots, \{x_0,x_k\}$ which joint vertex x_0 to every other vertex of set K. If $(G) \geq 3k-2$ then (*) is sufficient condition for G to be k-connected.