

Władysław Andrzej STEC  
Wyższy Urząd Górniczy

## WYKORZYSTANIE NIWELACJI SATELITARNEJ DO WYZNACZANIA WYSOKOŚCI PUNKTÓW OBSERWACYJNYCH POWIERZCHNI

**Streszczenie.** Przedstawiono możliwości i uwarunkowania wykorzystania techniki satelitarnej GPS do wyznaczania wysokości punktów obserwacyjnych.

## SATELLITE SURVEY USE FOR RECKONING THE HEIGHT OR SURFACE OBSERVATION POSTS

**Summary.** The paper presents possibilities and conditions of GPS satellite technology use for reckoning of the height of surface observation posts.

### 1. Wstęp

Coraz powszechniejsze stosowanie techniki satelitarnej GPS do wyznaczania współrzędnych płaskich X,Y punktu geodezyjnego kusi możliwością wykorzystania tychże pomiarów do określenia współrzędnej pionowej Z. Możliwość określania techniką satelitarną wysokości punktów położonych w rejonie oddziaływania eksploatacji gorniczej znacznie ułatwiłoby sam proces pomiaru wysokości i obliczenia obniżeń punktów. Powstaje jednak pytanie, czy istnieje możliwość wykorzystania techniki satelitarnej do pomiaru wysokości punktu, a zwłaszcza czy dokładność wyznaczenia wysokości tą techniką jest wystarczająca w świetle obowiązujących przepisów. Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy przeanalizować działanie systemu GPS oraz jego podstaw teoretycznych.

Przez pojęcie niwelacja satelitarna rozumie się procedurę prowadzącą do uzyskania wysokości ortometrycznych na podstawie wysokości geometrycznych, wyznaczanych

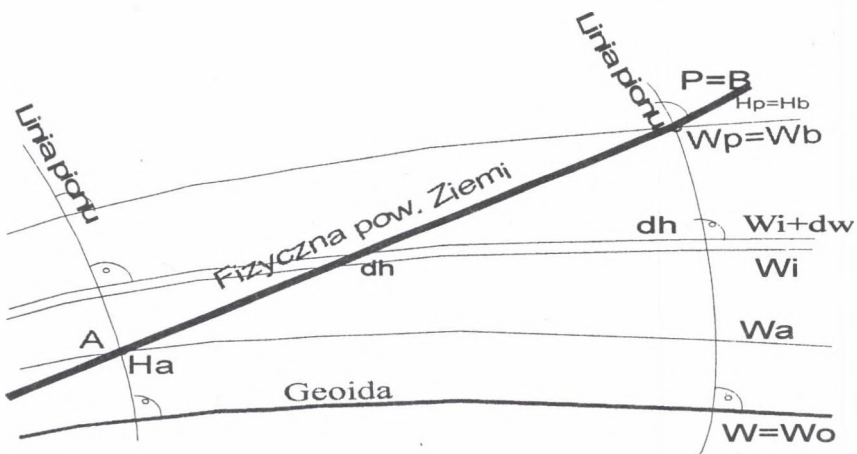
techniką GPS oraz dodatkowych informacji o parametrach ziemskiego pola siły ciężkości, takich, które umożliwiają wyznaczenie odstępstw geoidy od elipsoidy geocentrycznej [1].

W niwelacji satelitarnej odwołujemy się do wysokości ortometrycznych  $H^{ort}$ , gdyż tylko one mają ścisłą i jednoznaczną interpretację geometryczną. Oznaczają one długości odcinków linii pionu rzeczywistego pola siły ciężkości mierzone od powierzchni geoidy do punktu położonego na fizycznej powierzchni Ziemi. Natomiast wysokościami geometrycznymi  $H$  są odległości normalnych mierzone od powierzchni elipsoidy geocentrycznej do punktu na fizycznej powierzchni Ziemi. Jeśli potrafimy wyznaczyć wartości odstępstw  $N$  geoidy od elipsoidy geocentrycznej, to odejmując te wartości od wysokości geometrycznych  $H$  uzyskanych z pomiarów satelitarnych wyznaczmy wysokości ortometryczne. Z uwagi na małą krzywiznę pionu, z wystarczającym przybliżeniem można zapisać tę procedurę w następujący sposób

$$H^{ort} = H - N$$

## 2. Wysokości ortometryczne

Wysokości ortometryczne oznaczają odległości punktów fizycznej powierzchni Ziemi od geoidy mierzone wzdłuż linii pionu (rys. 1).



Rys. 1. Wysokości ortometryczne  
Fig. 1. Orthometric height

Ze względu na niezależność wartości liczby geopotencjalnej od drogi, na której tę liczbę wyznaczano, można napisać następujące wyrażenie [1]:

$$C = W_o - W_p = \int_o^P g dh$$

Oznacza ono, że całkowanie, prowadzące do uzyskania wartości  $C$ , wykonuje się wzdłuż linii pionu punktu  $P$ . Do wzoru definiującego ściśle wysokość ortometryczną dochodzimy przekształcając wyrażenie:

$$C = \int_o^P g dH = \int_o^H \bar{g} dH = H \bar{g}$$

Przez  $\bar{g}$  oznaczono średnią wartość całki:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_o^H g dH$$

czyli przeciętną wartość przyspieszenia siły ciężkości na odcinku linii pionu odpowiadającym wysokości  $H$ . Wyrażenie definiujące wysokość ortometryczną ma postać:

$$H^{ort} = \frac{W_p - W_o}{\bar{g}}$$

Wyrażenie w liczniku, tzn. ujemna różnica potencjałów powierzchni ekwipotencjalnej punktu  $P$  i geoidy albo liczba geopotencjalna  $C$ , może być wyznaczone na dowolnej drodze poprzez realizację całki za pomocą pomiarów różnic wysokości ( $dh = \Delta h$ ) oraz pomiarów przyspieszenia siły ciężkości  $\bar{g}$ . Wyrażenie to wyznaczane jest z taką dokładnością, na jaką pozwala współczesna technika niwelacji precyzyjnej. Ponieważ jest to niwelacja o dużej dokładności, a bardzo wysoka dokładność wartości  $\bar{g}$  nie jest potrzebna, to z wyznaczeniem liczby geopotencjalnej nie ma większych technologicznych problemów.

Był natomiast od początku i pozostaje nadal aktualny problem określenia wartości przeciętnej przyspieszenia siły ciężkości  $\bar{g}$  wzdłuż odcinka linii pionu na drodze od geoidy do fizycznej powierzchni Ziemi.

Z uwagi na powyższe trudności rozważmy dokładność określania wysokości ortometrycznych punktu w oparciu o pomiary wykonane GPS oraz o położenie geoidy reprezentującej lokalną powierzchnię.

### 3. Dokładność wyznaczenia wysokości punktów obserwacyjnych w oparciu o pomiary satelitarne GPS

Wysokości ortometryczne punktu otrzymujemy odejmując od wysokości geometrycznej punktu, określonej satelitarną techniką GPS, wartość odstępstwa geoidy od elipsoidy geocentrycznej.

Ze wzoru

$$H^{ort} = H - N$$

wynika, że dokładność określenia wysokości ortometrycznej punktu uzależniona jest od dokładności wyznaczenia wysokości geometrycznej  $H$  i dokładności wyznaczenia odstępstwa geoidy od elipsoidy geocentrycznej  $N$  [1].

O ile wyznaczenie dokładności określenia wysokości geometrycznych nie nastęrcza trudności, o tyle wyznaczenie samej wartości odstępstw geoidy od elipsoidy geocentrycznej oraz dokładności jej wyznaczenia nastęrcza wiele trudności, czy nawet staje się nieosiągalne.

Od wielu lat prowadzone są prace zmierzające do wyznaczenia położenia geoidy względem elipsoidy geocentrycznej z taką dokładnością, aby wyznaczanie wysokości ortometrycznych było możliwe poprzez tworzenie różnic pomiędzy wysokościami geometrycznymi a wysokościami geoidy (rys.2). Wyznaczenie położenia geoidy względem elipsoidy geocentrycznej jest zagadnieniem bardzo złożonym, uzależnionym od wielu czynników, a zwłaszcza od wielkości zmian przyspieszenia siły ciężkości.

Przy wyznaczeniu odstępstw geoidy należy uwzględnić długookresowe, średniookresowe i krótkookresowe zmiany przebiegu geoidy. Pokrywałyby się one z ponadregionalnym, regionalnym i lokalnym charakterem zakłóceń pola grawitacyjnego. Według Schwarza [1] na wartość odstepu geoidy od elipsoidy składają się następujące elementy

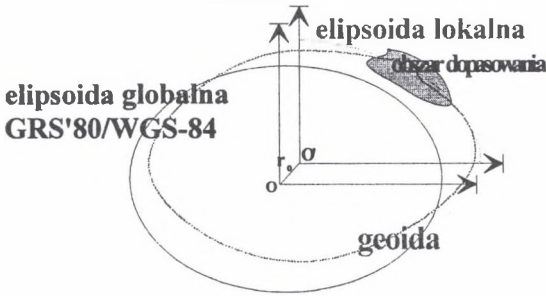
$$N = N_{GM} + \Delta N_{\Delta g} + \Delta N_h$$

gdzie:

$N_{GM}$  - oznacza odstęp wyznaczony na podstawie modelu potencjału grawitacyjnego, dający obraz jedynie długookresowych zmian geoidy,  
 $N_{GM} + \Delta N_{\Delta g}$  - reprezentuje geoidę lokalną, wzbogaconą poprzez wykorzystanie

regionalnych i lokalnych anomalii grawimetrycznych,

$N_{GM} + \Delta N_{\Delta g} + \Delta N_b$  - oznacza geoidę szczegółową, dla której wyznaczenia wykorzystano numeryczny model terenu dla odpowiedniej korekcji szczegółowego pola anomalii grawimetrycznych.



Rys. 2. Elipsoida lokalna dopasowana do geoidy w odniesieniu do elipsoidy globalnej WGS-84

Fig. 2. Local ellipsoid adapted to geoid in comparison with WGS-84 global ellipsoid

#### 4. Uprozczone sposoby (interpolacyjne) wyznaczania geoidy na małych obszarach (lokalnej)

Jeżeli na pewnym obszarze, objętym siecią punktów GPS, istnieją takie punkty (i), które mają określone wysokości ortometryczne, lub punkty zostały dowiązane wysokościowo do punktów niwelacyjnych znanych w systemie wysokości ortometrycznych, to można wyznaczyć przybliżony przebieg geoidy na tym obszarze w następujący sposób [1]:

Obliczyć odstępę geoidy od elipsoidy odejmując wysokości ortometryczne od wysokości geometrycznych wg wzoru:

$$N_i = H_i - H_i^{ort}$$

Zestawić równania interpolacyjne o następującej postaci

$$\varepsilon_i = N_o + (ab) \left( \frac{B_i}{L_i} \right) - N_i$$

Układ równań należy zestawić dla wszystkich punktów (i), w których wyznaczono  $N_i$ . W wyniku rozwiązania układu dla  $\sum \varepsilon_i^2 = \text{minimum}$  wyznacza się współczynniki interpolacyjne  $N_o$ , a i b.

$B_i, L_i$  i  $B_j, L_j$  - to współrzędne geodezyjne punktu (i) oraz punktu (j).

Obliczyć wysokości ortometryczne punktów ( $j$ ), które miały określone tylko wysokości geometryczne, poprzez interpolację

$$H_j^{\text{ort}} = H_j - N_o - \left( ab \right) \left( \frac{B_j}{L_j} \right)$$

Ta liniowa interpolacja wysokości geoidy może dać dobre wyniki w warunkach:

- niewielkiego obszaru nizinnego o jednolitej budowie geologicznej,
- równomiernego rozmieszczenia punktów o wyznaczonych wysokościach geometrycznych i ortometrycznych w analizowanym obszarze.

(W obszarze 20x20 km w Poznaniu zgodność wartości wyinterpolowanych z wynikami niwelacji geometrycznej była na poziomie  $\pm 2$  cm).

## 5. Wyznaczanie położenia elipsoidy na podstawie pomiarów satelitarnych

Klasyczna metoda doboru rozmiaru, kształtu i położenia elipsoidy, nosząca miano metody Helmerta [1], polegała na jednoczesnym wyznaczeniu parametrów elipsoidy i aproksymacji geoidy powierzchnią elipsoidy na pewnym obszarze pod warunkiem minimum sumy kwadratów składowych odchyień pionu w punktach stacji astronomicznych

$$\sum_i^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{minimum}$$

Zdefiniowany ziemski układ odniesienia CTS [1] jest układem geocentrycznym związanym z Ziemią. Początek tego układu pokrywa się ze środkiem mas Ziemi. Oś pionowa pokrywa się z osią obrotu Ziemi i jest prostopadła do płaszczyzny średniego równika. Układ CTS jest realizowany poprzez zbiór współrzędnych prostokątnych stacji fundamentalnych tworzących światową sieć.

Możemy wyznaczać z wysoką dokładnością współrzędne punktów w układzie geocentrycznym za pomocą techniki GPS. Jeśli więc na pewnym obszarze mamy zespół takich punktów geodezyjnych i jeśli punkty te mają wyznaczone wysokości ortometryczne metodą niwelacji, to dokonawszy redukcji współrzędnych takich punktów na geoidę możemy wyznaczyć położenie elipsoidy aproksymującej geoidę na tym obszarze spełniając warunek minimum sumy kwadratów odstępów geoidy od wyznaczonej elipsoidy w punktach o znanych współrzędnych geocentrycznych, tzn.:

$$\sum_i^n N_i^2 = \text{minimum}$$

gdzie:

$N$  jest odstępem geoidy od elipsoidy.

Taka elipsoida ma charakter elipsoidy lokalnej, *dopasowanej* do geoidy na pewnym obszarze.

## 6. Wnioski

Z powyższych rozważań dotyczących możliwości wykorzystania techniki satelitarnej GPS do wyznaczania wysokości punktu na powierzchni wynikają następujące wnioski.

1. Określenie wysokości ortometrycznej punktu obserwacyjnego na podstawie pomiarów techniką satelitarną GPS jest możliwe. Wyznaczenia tych wysokości można dokonać w oparciu o wysokości geometryczne uzyskane techniką GPS oraz informacje dotyczące położenia geoidy względem elipsoidy geocentrycznej.
2. Dokładność określenia wysokości ortometrycznej punktu zdeterminowana jest dokładnością określenia odstępu geoidy od elipsoidy geocentrycznej.
3. W przypadku małych obszarów nizinnych o jednorodnej budowie geologicznej (gdzie zmiany przyspieszenia siły ciężkości i gęstości skorupy ziemskiej mają charakter liniowy) oraz równomiernego rozmieszczenia punktów posiadających wysokości, określone w odniesieniu do geoidy i elipsoidy geocentrycznej, dokładność określenia wysokości ortometrycznej dowolnego punktu tego obszaru będzie się kształtowała na poziomie  $\sim 20$  mm.
4. Błąd jednokilometrowej wysokości ortometrycznej, obliczonej w oparciu o niwelację i znajomość wartości przyspieszenia siły ciężkości między punktami pomiarowymi, spowodowany błędem wyznaczenia przeciętnej wartości przyspieszenia siły ciężkości oraz błędem określenia gęstości skorupy ziemskiej kształtuje się na poziomie 25 mm.

## LITERATURA

1. Czarnecki K.: Geodezja współczesna w zarysie. Wiedza i Życie, Warszawa 1994r.

Recenzent: doc. dr inż. Tadeusz Dziura

### **Abstract**

In reference to more and more common usage of GPS satellite technique for positioning a point on the surface that is even coordinates  $X, Y$ , the possibility of taking advantage of satellite technique for positioning the height of points on the surface was considered. Taking advantage of this technique could substantially make easier and faster to position the height of a point, for instance a point which is situated in the scope of the influence of mining exploitation. Orthometric height of a point can be obtained by deducting from the height positioned by GPS the distance between geoid and geocentric ellipsoid. The exactitude of positioning the orthometric height of a point is conditioned by the precision of fixing the distance between geoid and ellipsoid. For not large low-lying area with homogeneous geological structure the precision of positioning the orthometric height evaluates on the level of  $\pm 20$  mm.