ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Olga BEREŚNIEWICZ-RAJCA

O WSPÓŁCZYNNIKACH FUNKCJI GRUNSKY'EGO-SHAHA

Streszczenie. Korzystając z twierdzenia udowodnionego przez Hummela, wyprowadzono pewną nierówność dla funkcji Grunsky'ego-Shaha. Podano oszacowanie współczynnika a_2 oraz, przy założeniu $re(a_k) > 0$, $k = 2,3,\ldots n-1$, znaleziono ogólny wzór na oszacowanie współczynników tej funkcji.

1. Niech K oznacza rodzinę funkcji postaci

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = b_1(z + a_2 z^2 + \ldots), \tag{1}$$

gdzie $0 < b_1 < 1$, jednolistnych w $U = \{z : |z| < 1\}$ i i spełniających warunek

$$f(z_1)\overline{f(z_2)} \neq -1,$$

dla każdej pary $z_1, z_2 \in U$. Funkcje te nazywamy funkcjami Grunsky'ego-Shaha.

2. J.A. Hummel w swojej pracy [1] udowadnia szereg twierdzeń dla pary Aharonowa, czyli dla pary funkcji (F,G) holomorficznych w U i takich, że $\bigwedge_{z_1,z_2} F(z_1)G(z_2) \neq 1$. W pracy tej na stronie 232 podano następujące twierdzenie.

Niech (F,G) będzie parą Aharonowa funkcji jednolistnych, u, v, x, y dowolnymi wektorami skończonymi, a λ dowolną liczbą rzeczywistą, wówczas

$$\begin{aligned} re\Big\{&\lambda^2 \left[\gamma_{00}(F) + \gamma_{00}(G)\right] + \lambda\left[C'_0(F)u - C'_0(G)v - C'_0(G)x + \right. \\ &\left. + C'_0(F)y\right] + u' K(F,G)x + u' C(F)y + v' C(G)x + v' K(G,F)y\Big\} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

W twierdzeniu tym wprowadzone zostały następujące oznaczenia, a mianowicie oznaczono przez

$$C(F) = (\gamma_{mn}(F))_{m,n=1}^{\infty}, \quad C_o(F) = (\gamma_{mo}(F))_{m=1}^{\infty},$$

$$K(F,G) = (K_{mn}(F,G))_{m,n=1}^{\infty} \tag{3}$$

macierze o następujących elementach

$$\gamma_{mn}(F) = \sqrt{mn}\, c_{mn}(F), \quad \gamma_{on}(F) = \sqrt{n}\, c_{on}(F), \quad \gamma_{mo}(F) = \sqrt{m}\, c_{mo}(F),$$

$$\gamma_{oo}(F) = c_{oo}(F), \quad k_{mn}(F,G) = \sqrt{mn}\, k_{mn}(F,G), \tag{4}$$

gdzie:

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,n=o}^{\infty} c_{mn} z^m \zeta^n, \tag{5}$$

$$\log\left[1 - f(z)\bar{f}(\zeta)\right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} k_{mn} z^m \zeta^n, \quad \bar{f}(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})}. \tag{6}$$

3. Zajmijmy się teraz funkcjami klasy K. Para $(f, -\bar{f})$, gdzie $f \in K$ jest parą Aharonowa funkcji jednolistnych. Zatem można, korzystając z powyższego twierdzenia, wyprowadzić dla niej nierówność analogiczną do nierówności (2). A mianowicie, przyjmując w (2) $F = f$ i $G = -\bar{f}$, po odpowiednich przekształceniach, dostaniemy

$$\mathrm{re}\left\{2\lambda^2 \gamma_{oo} + C_o'(u - \bar{v} - \bar{x} + y) + u' Cy + \bar{v}' C\bar{x} + u' Kx + \bar{v}' K\bar{y}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{7}$$

Załóżmy obecnie, że $u = v = 0$, $-\bar{x} = y$ i $\lambda = 0$; wtedy po uwzględnieniu (3) i (4) nierówność (7) przejdzie w nierówność

$$\mathrm{re}\left\{\sum_{n=1}^{N} \sqrt{n}\, c_{on}\, y_n\right\} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} |y_n|^2. \tag{8}$$

Rozwijając w szereg lewą stronę równości (5) i porównując współczynniki otrzymanego rozwinięcia z współczynnikami prawej strony (5), otrzymamy

$$c_{oo} = \log b_1, \quad c_{o1} = a_2, \quad c_{o2} = a_3 + \frac{1}{2} a_2, \dots . \tag{9}$$

Łatwo można zauważyć, że

$$c_{ok} = a_{k+1} + R(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2), \quad k = 2,3, \ldots N-1, \tag{10}$$

gdzie $R(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2)$ jest wielomianem o współczynnikach dodatnich. Załóżmy następnie, że y jest wektorem o współrzędnych $y_1 = y_2 = \ldots = y_{N-1} = 0$, $y_N = 1$. Wtedy, po uwzględnieniu (9), nierówność (8) dla $N = 1$ przyjmie postać

$$\mathrm{re}\{a_2\} \leq \frac{1}{2}$$

oraz dla $N = 2$ - postać

$$\mathrm{re}\left\{a_3 + \frac{1}{2} a_2\right\} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Przy założeniu, że $\mathrm{re}\{a_2\} > 0$, dostaniemy

$$\mathrm{re}\{a_3\} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Analogicznie, jeżeli założymy, że $\mathrm{re}\{a_k\} > 0$, $k = 2,3, \ldots N-1$, to z uwagi na (10), z nierówności (8) dostaniemy ogólny wzór na oszacowanie współczynników funkcji (1), a mianowicie

$$\mathrm{re}\{a_n\} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

LITERATURA

[1] Hummel J.A.: Inequalities of Grunsky typ for Aharonov pairs in College Park, Md., USA.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУНКЦИИ ГРУНСКОГО-ШАХА

Р е з ю м е

Пользуясь теоремой Гаммеля выведено некоторое неравенство для функции Грунского-Шаха. Найдено оценку коэффициента a_2 и предполагая, что $\mathrm{re}\{a_k\} > 0$, $k = 2,3, \ldots, n - 1$, найдено общую формулу для оценки коэффициентов этой функции.

ABOUT THE COEFFICIENTS OF GRUNSKY-SHAH FUNCTIONS

S u m m a r y

Making use of the Hummel theorem, the paper provides one ineqality for Grunsky-Shah functions. One obtained estimate of the coefficient a_2 and for $re\{a_k\} > 0$, $k = 2,3, \dots n-1$, one finds the universal formula for the estimates of coefficients of these functions.