ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Krystyna AUGUSTYNOWICZ, Adam CZECH

O ZASTOSOWANIU METODY FOURIERA DO BADANIA STABILNOŚCI PEWNYCH RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH

Streszczenie. Praca poświęcona jest badaniom stabilności pewnego równania o zmiennych współczynnikach postaci $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + B(t)u + [2\sigma + C(t)]\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x)$ z warunkami $u(t,0) = u(t,1) = 0$ i $u(0,x)=f(x)$; $u_t(0,x) = g(x)$. Poszukując rozwiązania $u(t,x)$ w przestrzeni Banacha z normą $\|u(t,x)\|_1^2 = \int_0^1 (u^2 + u_t'^2)dx$ wykazaliśmy za pomocą metody Fouriera, że rozwiązanie istnieje i jest stabilne w sensie wielu norm, tzn. spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|f\| + \|g\| + \sup_t \|F(t,x)\| < \delta \Longrightarrow \bigwedge_t \|u\|_1 < \varepsilon$$

Niech $V_n(x)$ i λ_n oznacza odpowiednio funkcje i wartości własne operatora L (operator L jest operatorem różniczkowym rzędu drugiego) Rozważmy w obszarze $\Omega = [0,1] \times [0,\infty)$ równanie różniczkowe postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + B(t)u + [2\sigma + C(t)]\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x) \tag{1}$$

z warunkami:

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = f(x); \qquad u_t(0,x) = g(x). \tag{3}$$

Założenie A

Załóżmy, że następujące warunki są spełnione:

(i) funkcje $V_n(x)$ tworzą układ ortonormalny, $\lambda_n \longrightarrow -\infty$;
(ii) funkcje f, g, F można rozwinąć w szeregi funkcyjne wg $V_n(x)$;
(iii) funkcja $B(t)$ jest całkowalna w $[0,\infty)$;
(iv) funkcja $C(t)$ jest ograniczona.

Twierdzenie

Jeżeli założenia (i) - (iv) są spełnione, to rozwiązanie układu (1) - (3) istnieje i dane jest w postaci szeregu:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\, V_n(x). \tag{4}$$

Dowód

Podstawiając (4) - (1), otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n'(t)\, V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) L\, V_n(x) + B(t) \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\, V_n(x) +$$

$$+ \left[2\delta + C(t)\right] \sum_{n=1}^{\infty} Z_n'(t)\, V_n(x) + F(t,x) \tag{5}$$

po wymnożeniu (5) przez $V_n(x)$ i scałkowaniu w $[0,1]$

$$Z_n''(t) = \lambda_n Z_n(t) + B(t)\, Z_n(t) + \left[2\delta + C(t)\right] Z_n'(t) + F_n(t), \tag{6}$$

gdzie

$$F_n(t) = \int_0^1 F(t,x)\, V_n(x)dx.$$

Ponieważ $\|u(t,x)\|^2 = \int_0^1 (u^2 + u_t'^2)dx$: więc

$$\|u(t,x)\|^2 = \int_0^1 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\, V_n(x)\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\, V_n(x)\right)^2\right] dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(Z_n(t))^2 + (Z_n'(t))^2\right].$$

Zauważmy, że wobec (iv) istnieje stała C taka, że $C(t) \leqslant C$, zatem

$$\frac{d\|u\|^2}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} 2Z_n'(t)\left[(2\delta + C(t))Z_n'(t) + (\lambda_n + B(t)Z_n(t) + F_n(t)\right] \leqslant \frac{d\|\tilde{u}\|^2}{dt},$$

gdzie $\tilde{u}$ jest rozwiązaniem (1), w którym $C(t) = C$.

Jeżeli dla u i $\tilde{u}$ przyjmiemy jednakowe warunki początkowe, to

$$\|u\|^2 \leqslant \|\tilde{u}\|^2. \tag{7}$$

Układ (6) dla $\tilde{u}$ ma postać:

$$\tilde{Z}_n''(t) = \lambda_n \tilde{Z}_n(t) + B(t)\tilde{Z}_n(t) + (2G + C)\tilde{Z}_n'(t) + F_n(t). \tag{8}$$

Oznaczmy $2\alpha = 2G + C$ i przepiszmy (8) w postaci:

$$Z_n''(t) - 2\alpha Z_n'(t) - \lambda_n Z_n(t) = B(t)Z_n(t) + F_n(t) \tag{9}$$

z warunkiem początkowym

$$Z_n(0) = f_n, \quad \text{gdzie} \quad f_n = \int_0^1 f(x)V_n(x)dx,$$

$$Z_n'(0) = g_n, \quad \text{gdzie} \quad g_n = \int_0^1 g(x)V_n(x)dx.$$

Równanie charakterystyczne dla (9) ma postać:

$$a^2 - 2\alpha a - \lambda_n = 0; \qquad \Delta = 4\alpha^2 + 4\lambda n.$$

Z założenia (i) wynika, że dla $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ powyższa Δ jest dodatnia i dla pozostałych λ_n ujemna. Rozwiązania pierwszych $k-1$ równań (9) będą się wyrażały przez funkcję wykładniczą i ich skończona suma $\sum_{n=1}^{k-1} Z_n(t)V_n(x)$ może być odpowiednią ilość razy różniczkowana po t i x. Z uwagi na dalsze oszacowania, dla $n = k, k+1, \dots$ weźmy rozwiązanie $\tilde{Z}_n(t)$ w postaci:

$$\tilde{Z}_n(t) = f_n e^{\alpha t}\cos\mu_n t + \frac{g_n - \alpha f_n}{\mu_n} e^{\alpha t}\sin\mu_n t +$$
$$+ \frac{1}{\mu_n}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\sin\mu_n(t-\tau)B(\tau)\tilde{Z}_n(\tau)d\tau + \frac{1}{\mu_n}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\sin\mu_n(t-\tau)F_n(\tau)d\tau, \tag{10}$$

gdzie

$$\mu_n = \sqrt{-\lambda_n - \alpha^2}.$$

Stosując do (10) uogólnioną nierówność Gronwalla-Bellmana i wykonując oczywiste oszacowania mamy:

$$|\tilde{Z}_n(t)| \leq |f_n| e^{\alpha t} + \frac{|\alpha|}{\mu_n}|f_n| e^{\alpha t} + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \sup_t |F_n(t)| \frac{1}{\mu_n} + \frac{1}{\mu_n}\int_0^t |B(\tau)\tilde{Z}_n(\tau)|\,d\tau$$

$$|\tilde{Z}_n(t)| \leq \left[|f_n|\left(1 + \frac{|\alpha|}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \frac{1}{\mu_n}\sup_t |F_n(t)|\right] \exp \frac{1}{\mu_n}\int_0^t |B(\tau)|\,d\tau.$$

Z (iii) wynika, że $\int_0^t |B(\tau)|\,d\tau < N$, zatem istnieje stała k taka, że

$$|\tilde{Z}_n(t)| \leq k\left[|f_n|\left(1 + \frac{|\alpha|}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \frac{1}{\mu_n}\sup_t |F_n(t)|\right] \tag{10'}$$

niech $|v_n(x)| < k_1$ wtedy

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} \tilde{Z}_n(t)v_n(x)\right| \leq k_1 \sum_{n=k}^{\infty} |\tilde{Z}_n(t)| \leq$$

$$\leq k\, k_1 \sum_{n=k}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{|\alpha|}{\mu_n}\right)|f_n| + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \frac{1}{\mu_n}\sup_t |F_n(t)|\right]. \tag{11}$$

Z przyjętych założeń wynika zbieżność jednostajna szeregu po lewej stronie (11).

Przejdziemy do zbadania zbieżności szeregów reprezentujących pochodną. Szereg dla $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ począwszy od k-tego miejsca ma postać:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \sum_{n=k}^{\infty} Z_n'(t)v_n(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\Big\{ e^{\alpha t} f_n(\alpha\cos\mu_n t - \mu_n \sin\mu_n t) +$$

$$+ \frac{g_n - \alpha f_n}{\mu_n} e^{\alpha t}(\alpha \sin\mu_n t + \mu_n \cos\mu_n t) + \frac{1}{\mu_n}\int_0^t \Big[e^{\alpha(t-\tau)}\alpha\sin\mu_n(t-\tau) +$$

$$+ \mu_n \cos\mu_n(t-\tau)\,.\,B(\tau)\tilde{Z}_n(\tau) + F_n(\tau)\Big]d\tau\Big\} v_n(x).$$

Ponieważ

$$\left|f_n(\alpha\cos\mu_n t - \mu_n\sin\mu_n t) + \frac{g_n-\alpha f_n}{\mu_n}(\alpha\sin\mu_n t + \mu_n\cos\mu_n t)\right| \leq A(|g_n| + |f_n|);$$

$$\left|\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\left[\frac{\alpha}{\mu_n}\sin\mu_n(t-\tau) + \cos\mu_n(t-\tau)\right]\left[\tilde{Z}_n(\tau)B(\tau) + F_n(\tau)\right]d\tau\right| \leq$$

$$B\left[|f_n|\left(1+\frac{|\alpha|}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \frac{1}{\mu_n}\sup_t|F_n(t)|\right] + B\sup_t|F_n(t)|,$$

gdzie A jest pewną stałą, B wyznaczono z warunku:

$$\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\left[\frac{|\alpha|}{\mu_n}|\sin\mu_n(t-\tau)| + |\cos\mu_n(t-\tau)|\right]|B(\tau)| \leq B$$

i wykorzystano (10').

W ten sposób wykazaliśmy zbieżność szeregu $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$. W podobny sposób można wykazać zbieżność szeregu dla $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, a zbieżność $L\tilde{u}$ wynika z przyjętych założeń. Zauważmy, że:

$$f_n = \int_0^1 f(x)V_n(x)dx$$

i

$$|f_n| \leq k_1\left|\int_0^1 f(x)V_n(x)dx\right| \leq k_1\int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \frac{k_1}{2}\left[\int_0^1 f^2(x)dx+1\right] = \frac{k_1}{2}(\|f\|^2+1).$$

Przejdziemy do badania stabilności rozwiązania (1) - (3) w sensie wielu norm [1].

Twierdzenie

Jeżeli spełnione są warunki (i) - (iv) założenia A, to rozwiązanie trywialne jest stabilne w sensie wielu norm, tzn. spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \|f\| + \|g\| + \sup_t\|F(t,x)\| < \delta \Rightarrow \bigwedge_t \|u\| < \varepsilon.$$

Dowód

Niech $n = 1,2,\ldots,k-1$. Wtedy $\tilde{Z}_n(t)$ spełnia równanie całkowe, gdzie $\mu_n = \sqrt{\alpha^2+\lambda_n}$

$$\tilde{Z}_n(t) = \frac{1}{2\mu_n}\left[g_n - (\alpha-\mu_n)f_n\right]e^{(\alpha+\mu_n)t} + \frac{1}{2\mu_n}\left[(\alpha+\mu_n)f_n - g_n\right]e^{(\alpha-\mu_n)t} +$$

$$+\frac{1}{\mu_n}\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\operatorname{sh}\mu_n(t-\tau)\left[B(\tau)\tilde{Z}_n(\tau)+F_n(\tau)\right]d\tau .$$

$$|\tilde{Z}_n(t)| \le (\bar{C}|f_n| + \frac{1}{\mu_n}|g_n|)e^{(\alpha+\mu_n)t} + \int_0^t e^{(\alpha+\mu_n)(t-\tau)}\left|\frac{e^{-2\mu_n(t-\tau)}-1}{2\mu_n}\right| \cdot$$

$$\cdot\ (|B(\tau)||\tilde{Z}_n(\tau)| + |F_n(\tau)|)d\tau$$

$$e^{-2\mu_n(t-\tau)} < 1.$$

Zatem

$$\frac{\left|e^{-2\mu_n(t-\tau)}-1\right|}{2\mu_n} = \frac{1-e^{-2\mu_n(t-\tau)}}{2\mu_n}$$

$$e^{(\alpha+\mu_n)(t-\tau)}\frac{1-e^{-2\mu_n(t-\tau)}}{2\mu_n} = \frac{1}{2\mu_n}\left[e^{(\alpha+\mu_n)(t-\tau)} - e^{(\alpha-\mu_n)(t-\tau)}\right] \le$$

$$\frac{1}{2\mu_n}e^{(\alpha+\mu_n)(t-\tau)}$$

czyli:

$$|\tilde{Z}_n(t)| \le (\bar{C}|f_n| + \frac{1}{\mu_n}|g_n|)e^{(\alpha+\mu_n)t} + \frac{1}{2\mu_n}\int_0^t e^{(\alpha+\mu_n)(t-\tau)}$$

$$\left[|B(\tau)||\tilde{Z}_n(\tau)| + |F_n(\tau)|\right] d\tau$$

mamy: $\max\limits_{k=1,\ldots,n-1}\mu_k = |\mu_1| < \alpha$ zatem z nierówności Gromwella-Bellmana

$$|\tilde{Z}_n(t)| \le \left[\bar{\bar{C}}|f_n| + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \sup_t|F_n(t)|\right]\exp\int_0^t|B(\tau)|d\tau$$

i powyższa nierówność pozwala oszacować rząd wzrostu $|\tilde{Z}_n(t)|$ dla k = 1,2, ..., n-1.

Analogiczną nierówność otrzymaliśmy poprzednio dla k = n, n + 1, ...

Zatem dla dowolnego n

$$|\tilde{Z}_n(t)| \le C_1(|f_n| + \frac{1}{\mu_n}|g_n| + \sup_t|F_n(t)|)$$

oraz

$$\|\tilde{u}(t,x)\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{z}_n(t)v_n(x)\|^2 = \sum_{Z_1=1}^{\infty} |\tilde{z}_n(t)|^2 \leq \bar{C}_1\|f\|^2 + \frac{1}{\mu_n}\|g\|^2 + \sup_t\|F\|^2,$$

co wobec warunku (7) dowodzi stabilności rozwiązania $u(t,x)$ i kończy dowód twierdzenia.

Uwaga

Ze względu na liniowość układu z powyższych oszacowań wynika również jednoznaczność rozwiązania układu (1) - (3).

LITERATURA

[1] Tylikowski A.: Stochastyczna stabilność układów ciągłych.

[2] Kowal B.E., Leniec I.P.: Ob ustoiczіwosti rieszenij liniejnych diffierientialnych urawnienij w czastnych proizwodnych so słuczajnymi koefficientami. Matiematiczieskaja Fizika. Wypusk 15, 1974 Kijew.

ОБ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФУРЬЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Р е з ю м е

В этой работе мы изучаем устойчивость некоторого уравнения с переменными коэффициентами в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + B(t)u + [2б + C(t)]\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x)$$

с условиями $u(t,0) = u(t,1) = 0$; $u(0,x) = f(x)$; $u_t(0,x) = g(x)$.

При помощи метода Фурье мы проявляем что решение $u(x,t)$ существует и оно устойчиво в смысле многих норм:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|f\| + \|g\| + \sup_t\|F(t,x)\| < \delta \Longrightarrow \bigwedge_t \|u\| < \varepsilon$$

ON APPLICATION FOURIER'S METHOD TO EXPLORATION STABILITY OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

S u m m a r y

In this paper we investigate stability of the trivial eolution of partial differential equation given in $\Omega = [0,1] \times [0,\infty)$ by:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + B(t)u + (2G + C(t))\frac{\partial u}{\partial t} + F(t,x)$$

with initial and boundary conditions.

We show by Fourier's method existence, uniqueness and stability solution that boundary - initial problem. Stability criterian in given in sense Mowchan's definition.