ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Krystyna AUGUSTOWICZ, Adam CZECH

PEWNE KRYTERIUM STABILNOŚCI DLA PARABOLICZNYCH RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH OPARTE NA LEMACIE BIHARIEGO

Streszczenie. Celem pracy jest zbadanie stabilności rozwiązania pewnego nieliniowego układu równań postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_o(t,x)u + F(t,x,u); \quad x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Przy założeniu $\|F(t,x,u)\| \leqslant f_1(t) + f_1(t)\|u\|^2$ pokazaliśmy, stosując lemat Bihariego i operator przejścia $\Phi(t,\tau)$, że rozwiązanie jest stabilne. Podobnie w twierdzeniu 2, stabilność rozwiązania wynika z przyjętych założeń o funkcji $F(t,x,u)$. Istotność założenia $\int_\Omega (uL_o u + \frac{1}{2}u^2)dx \leqslant 0$ ilustruje przykład 2 podany po tym twierdzeniu.

Rozważmy układ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_o(t,x)u + F(t,x,u) \quad x = (x_1,\dots,x_n)$$

$$u(0,x) = \varphi_o(x) \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$u(t,x)_\Gamma = 0.$$

określony w walcu $\Omega \times [0,\infty)$, gdzie Γ jest boczną powierzchnią walca $L_o(t,x)$ jest macierzowym operatorem, zawierającym pochodne cząstkowe względem $x_1,\dots,x_n$. Zakładamy, że układ (1) posiada rozwiązanie.

Lemat

Niech $u(t) \geqslant 0$, $f(t) \geqslant 0$ dla $t \geqslant t_o$, $u(t)$ i $f(t) \in C[t_o,\infty)$ i niech

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_o}^{t} f(t_1)\Psi(u(t_1))dt_1 \quad C > 0 \tag{2}$$

$\Psi(u)$ dodatnia, ciągła i niemalejąca funkcja dla $u \in (0,\infty)$.

Niech

$$\chi(u) = \int_0^u \frac{du_1}{\varphi(u_1)} \qquad (0 < u < \bar{u})$$

wtedy, jeśli

$$\int_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1 < \chi(\bar{u}-0) \qquad (t_0 \leqslant t < \infty), \tag{3}$$

to przy $t_0 \leqslant t < \infty$ zachodzi nierówność

$$u(t) \leqslant \chi^{-1}\Big[\int_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\Big], \tag{4}$$

gdzie $\chi^{-1}(u)$ jest funkcją odwrotną do $\chi(u)$.
Wykorzystamy szczególny przypadek lematu Bihariego dla $\varphi(u) = u^2$. Wtedy (4) ma postać

$$u(t) \leqslant \frac{c}{\Big[1 - c\int_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1\Big]^{1/2}}$$

przy założeniu, że mianownik jest dodatni.

Założenie A

Niech operator $L_0(t,x)$ będzie generatorem półgrupy operatorów przejścia $\vartheta(t,\tau)$ oraz $\|\vartheta(t,\tau)\| \leqslant \bar{C}$. Niech także

$$\|F(t,x,u)\| \leqslant f_1(t) + f_2(t)\,\|u\|^2 ,$$

gdzie f_1, f_2 są funkcjami ciągłymi dodatnimi i całkowalnymi w $[0,\infty)$.

Definicja 1

Będziemy mówić, że rozwiązanie układu (1) jest stabilne, jeżeli

$$\bigwedge_{t>0}\ \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta>0} \Big[\|\varphi_0(x)\| + \int_{\varepsilon}^{\infty} f_1(t)dt\Big] < \delta \Longrightarrow \|u\| < \varepsilon .$$

Twierdzenie 1

Niech będzie spełnione założenie A. Wtedy rozwiązanie układu (1) jest stabilne w sensie definicji 1.

Dowód

Wykorzystując operator $\mathfrak{F}(t,\tau)$ można układ (1) przedstawić w postaci równania całkowego

$$u(t,x) = \mathfrak{F}(t,0)\varphi_0(x) + \int_0^t \mathfrak{F}(t,\tau)F(\tau,x,u(\tau,x))d\tau. \qquad (5)$$

Przechodząc do normy i wykorzystując założenie A mamy

$$\|u(t,x)\| \leqslant \|\varphi_0(x)\|\bar{C} + \bar{C}\int_0^t f_1(\tau)d\tau + \bar{C}\int_0^t f_2(\tau)\|u(\tau,x)\|^2 d\tau. \qquad (6)$$

Niech $\bar{C}\left[\|\varphi_0(x)\| + \int_0^t f_1(\tau)d\tau\right] < \delta_1$, przy czym δ_1 wybierzemy na tyle małe, aby $1 - \delta_1\int_0^t f_2(\tau)d\tau > \frac{1}{2}$ dla dowolnego t. Jest to możliwe, ponieważ funkcja $f_2(t)$ jest całkowalna w $[0,\infty)$.
Zatem, stosując lemat Bihariego

$$\|u\| < \frac{\delta_1}{\left[1 - \delta_1\int_0^t f_2(\tau)d\tau\right]^{1/2}} \leqslant \sqrt{2}\,\delta_1. \qquad (7)$$

Wybierając teraz $\delta = \min(\sqrt{2}\,\delta_1, \varepsilon)$ otrzymujemy

$$\|u\| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad t \geqslant 0, \qquad (7')$$

co kończy dowód.

Przykłady oszacowania operatora $\mathfrak{F}$ można znaleźć w pracach Wanga, Tylikowskiego i innych. Przyjmowano wtedy, że $L_0(t,x) = L_0(x)$ i otrzymywano mocniejsze oszacowania postaci

$$\|\mathfrak{F}(t,\tau)\| \leqslant C\exp\left[-\gamma(t-\tau)\right], \qquad (8)$$

gdzie $\|\cdot\|$ była normą przestrzeni L_2.

Przykład 1

Niech

$$L_0 = a(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + c(t,x); \qquad \Omega = [0,1]$$

Niech a,b,c będą ciągłymi funkcjami oraz niech

$$a(t,x) \geq 0; \quad \frac{\partial a}{\partial x} \in C_{[0,1]}; \quad \bigwedge_t \sup_x\left[b(t,x) - \frac{\partial a}{\partial x}\right] \leq M;$$

$\sup\limits_x c(t,x)$ jest funkcją całkowalną w $[0,\infty)$ względem t

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2(t,x)dx.$$

Wtedy wzdłuż rozwiązań naszego równania:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 = 2\int_0^1 u\frac{\partial u}{\partial t}dx = 2\int_0^1\left[a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u + b(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x} + c(t,x)u^2\right]dx =$$

$$= 2\,a(t,x)u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^1 - 2\int_0^1\frac{\partial a}{\partial x}u\frac{\partial u}{\partial x}dx - 2\int_0^1 a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx +$$

$$+ 2\int_0^1 b(t,x)u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}dx + 2\int_0^1 c(t,x)u^2(t,x)dx \leq$$

$$\leq \int_0^1\left[b(t,x) - \frac{\partial a}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial x}[u^2]dx + 2\int_0^1 c(t,x)u^2(t,x)dx.$$

Zauważmy, że

$$\int_0^1\left[b(t,x) - \frac{\partial a}{\partial x}\right]\frac{\partial}{\partial x}[u^2]dx \leq Mu^2\Big|_0^1 \leq 0$$

na mocy warunków brzegowych (1).
Zatem

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 \leq 2\sup_x c(t,x)\,\|u\|^2.$$

Scałkujemy powyższą nierówność w przedziale $[\tau,t]$. Mamy:

$$\|u(t,x)\|^2 - \|u(\tau,x)\|^2 \leqslant 2\int_\tau^t \sup_x c(t_1,x)\|u(t_1,x)\|^2\, dt_1.$$

Stosując lemat Gronwalla-Bellmana, otrzymujemy

$$\|u(t,x)\|^2 \leqslant \|u(\tau,x)\|^2 \exp\Big[2\int_\tau^t \sup_x c(t_1,x)dt_1.$$

Z kolei

$$\|u(t,x)\|^2 \leqslant \|\mathfrak{P}(t,\tau)u(\tau,x)\|^2 \leqslant \|\mathfrak{P}(t,\tau)\|^2\|u(\tau,x)\|^2$$

Porównując powyższe nierówności, otrzymujemy

$$\|\mathfrak{P}(t,\tau)\|^2 \leqslant \exp\Big[2\int_0^\infty \sup_x c(t_1,x)dt_1\Big].$$

A więc w tym przypadku

$$\bar{c} = \exp\Big[\int_0^\infty \sup_x c(t_1,x)dt_1\Big].$$

Twierdzenie 2

Niech spełnione będą założenia:

$$\int_\Omega (uL_0u + \tfrac{1}{2}u^2)dx \leqslant 0 \qquad \text{(a)}$$

$$F^2(t,x,u) \leqslant f_1(t) + f_2(t)u^4 \qquad \text{(b)}$$

Wtedy, jeżeli $\|u\|^2 = \int_\Omega u^2dx$ rozwiązanie (1) jest stabilne w sensie definicji 1.

Dowód

Wprowadzamy funkcjonał

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx.$$

Mamy

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{\Omega} (uL_0 u + uF(t,x,u))dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega} (uL_0 u + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} F^2(t,x,u))dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\Omega} f_1(t)dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f_2(t)u^4 dx.$$

Całkując poważszą nierówność w przedziale $[0,t]$, mamy:

$$V(t) - V(o) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{vol}\Omega \int_0^t f_1(t_1)dt_1 + \frac{1}{2} \int_0^t f_2(t_1)V^2(t_1)dt_1.$$

Ponieważ $V(o) = \frac{1}{2}\|\varphi_0(x)\|^2$ można więc wybrać δ_1 podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1. Wybierając $\delta = \min(\sqrt{2}\,\delta_1, \frac{1}{2}\varepsilon^2)$, otrzymamy

$$\|u\| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0,$$

co kończy dowód.

Przykład 2

W twierdzeniu 2 istotne jest założenie (a). Rozpatrzmy operator L_0 taki, jak w przykładzie 1. Założenie o całkowalności $\sup_x c(t,x)$ zamienimy przez założenie:

$$c(t,x) + \frac{1}{2} < 0.$$

Wtedy

$$\int_0^1 uL_0 u + \frac{1}{2} u^2)dx < 0.$$

Uwaga

Wyniki pracy bez większych trudności można uogólnić na przypadek gdy

$$\|F(t,x,u)\| \leqslant f_1(t) + f_2(t)\|u\|^m, \quad m > 1.$$

LITERATURA

[1] Demidowicz B.P.: Lekcii po matiematiczieskoj tieorii ustoiczіwosti. "Nauka". Moskwa 1967.

[2] Bihari J.: A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniquess problem of differential equations. Acta Math. Acad.Scient. Hung. VII, 1-1956.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В этой работе мы исследуем устойчивость некоторой нелинейной системы в виде: $\frac{\partial u}{\partial t} = L_0(t,x)u + F(t,x,u)$. Пусть $F(t,x,u)$ удовлетворяет неравенству $\|F(t,x,u)\| \leqslant f_1(t) + f_2(t)\|u\|^2$ тогда с помощью лемы Бихари и оператора перехода $\Phi(t,\tau)$ мы проявляем что решение устойчиво.

Аналогично в теореме 2 устойчивость решения следует с условия об $F(t,x,u)$. Существенность условия $\int_\Omega (uL_0u + \frac{1}{2}u^2)dx$ изображивает пример 2.

CERTAIN CRITERION OF STABILITY OF NONLINEAR SYSTEM OF EQUATIONS BASED ON BIHARY'S LEMMA

S u m m a r y

The aim of this work is to examine the stability of solution of a certain non-linear system of equations in the form: $\frac{\partial u}{\partial t_2} = L_0(t,x)u + F(t,x,u)$. Under assumption that $\|F(t,x,u)\| \leqslant f_1(t) + f_2(t)\|u\|^2$ and applying Bihary's lemma as well as operator of transition $\Phi(t,\tau)$, we have proved that the solution is stable.

Likewise, in theorem 2 the stability of solution results from assumptions made about the function $F(t,x,u)$. The signigicance of assumption $\int_\Omega (uL_0u + \frac{1}{2}u^2)dx \leqslant 0$ is illustrated by example 2 given after this theorem.