ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Barbara JANIEC

# PEWNA WŁASNOŚĆ UOGÓLNIONEGO POTENCJAŁU CIEPLNEGO I JEJ ZASTOSOWANIE DO ROZWIĄZYWANIA I ZADANIA BRZEGOWEGO DLA RÓWNAŃ TYPU PARABOLICZNEGO

Streszczenie. W pracy podaje się własność brzegową uogólnionego potencjału cieplnego

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi .$$

Własność ta jest pewnym uogólnieniem własności brzegowej potencjału cieplnego warstwy podwójnej [2]

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ t>0}} \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau) \frac{\partial}{\partial n_\eta} w(x-\eta,t-\tau)dS_\eta = \pm \frac{1}{2} f(\xi,\tau) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau) \frac{\partial}{\partial n_\eta} w(\xi-\eta,t-\tau)dS_\eta .$$

Własność tę wykorzystuje się [2] do rozwiązania pierwszego zadania Fouriera dla równania przewodnictwa. Sformułowaną w twierdzeniu własność brzegową można zastosować przy rozwiązywaniu pierwszego zadania brzegowego dla równań cząstkowych rzędu 2 m typu parabolicznego, co pokazano w tej pracy.

Rozpatrzmy w obszarze $D = D_0 \times [0,T]$, gdzie $D_0 \subset E^n$, $T$ dowolne, układ równań postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(x,t,D_x^k)\, u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

z warunkami

$$u(x,o) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D_0 \\ x_0\in \partial D_0}} u(x,t) = \psi(x_0,t) \quad \text{dla każdego} \quad t \in [0,T] \quad \text{i} \quad x_0 \in \partial D_0 \tag{3}$$

gdzie $L(x,t,D_x)$ operator różniczkowy względem zmiennych przestrzennych stopnia $k \leqslant 2m$ postaci:

$$L(x,t,D_x^k)\left[\sum_{\substack{j_1\ldots j_k\\ 0\leqslant k\leqslant 2m}} A_{\alpha\beta}^{j_1\ldots j_k}(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right] \qquad \alpha,\beta = 1,2,\ldots N$$

sumowanie rozciąga się na wszystkie ciągi wskaźników $j_1\ldots j_k$, przyjmujące wartości $1,2,\ldots n$ z powtórzeniami. Zakładamy, że układ (1) jest paraboliczny w sensie Pietrowskiego. Przy założeniu, że $\partial D_o$ (brzeg obszaru $D_o$) jest sumą powierzchni Lapunowa, współczynniki operatora $L(x,t,D_x^u)$ przy pochodnych stopnia $2m$ spełniają warunek Höldera względem x z wykładnikiem $o < \alpha < 1$, istnieje macierz fundamentalna rozwiązań dla układu (1).

Rozwiązania zadania (1) - (3) szukamy w postaci sumy potencjałów

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{D_o} \Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi + \int_{D_o} \Gamma(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi , \tag{4}$$

gdzie

$$D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) = \left[\sum_{j_1\ldots j_{2m}} A_{\alpha\beta(\xi,\tau)}^{j_1\ldots j_{2m}} \frac{\partial^{2m-1}}{\partial\xi_{j_1}\ldots\partial\xi_{j_{2m-1}}}\cos(\xi_{j_{2m}},n_\xi),\right.$$

gdzie n normalna zewnętrzna do $\partial D_o$ w punkcie $\xi$ (4) spełnia warunek początkowy, a dla spełnienia warunku brzegowego dobierzemy odpowiednio nieznaną gęstość $\mu(x,t)$ wykorzystując własność brzegową dla potencjału

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi ,$$

$V(x,t)$ przy dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $\mu(x,t)$ jest ciągła dla punktów wewnętrznych obszaru D. Natomiast wartości $V(x,t)$ przy $x \to x_o$, $x_o \in \partial D_o$ zachowują się podobnie jak pochodna transwersalna potencjału warstwy pojedynczej.

Twierdzenie

Jeżeli gęstość $\mu(\xi,\tau)$ jest ciągła i ograniczona w $\partial D_o \times [0 < \tau < T]$, to

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x_o \in \partial D_o \\ x \in D_o}} V(x,t) = \frac{1}{2}\mu(x_o,t) + \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi$$

dla każdego $x_o$, t.

Dowód

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = Z(x-\xi,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t d\sigma \int_{E^n} Z(x-y,t,y,\sigma)\Phi(y,\sigma,\xi,\tau)dy =$$

$$= Z(x-\xi,t,\xi,\tau) + Z_1(x,t,\xi,\tau),$$

gdzie $Z(x-\xi,t,\xi,\tau)$ macierz fundamentalna rozwiązań dla układu parabolicznego z operatorem $L_o(\xi,\tau,D_x^{2m})$, który jest częścią główną operatora $L(x,t,D_x^k)$ z ustalonymi współczynnikami $(\xi,\tau)$, a $\Phi$ dobrane tak, by $\Gamma$ spełniało układ (1), zatem

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\, Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\, Z_1(x,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi = V_o(x,t) + V_1(x,t)$$

ale

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D_o \\ x_o \in \partial D_o}} V_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_o} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\, Z_1(x_o,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi \tag{5}$$

gdyż

$$\left|D_\xi^s D_x^r D_t^k\, Z_1(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+2mk+|s|+|r|-\alpha}{2m}}} \exp\left[-c\left(\frac{(x-\xi)^{2m}}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right]$$

Obliczmy $\lim_{x\to x_0} V_0(x,t)$. Oznaczając przez

$$W_0(x_0,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\, Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)dS_\xi ,$$

oszacujemy różnicę

$$R = V_0(x,t) - W_0(x_0,t).$$

Dodając i odejmując do R:

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\mu(x_0,\tau)dS_\xi ;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\mu(x_0,\tau)dS_\xi ;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\, \mu(x_0,t)dS_\xi ;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\, \mu(x_0,t)dS_\xi ;$$

$$\mu(x_0,t) \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x-\xi,t,x,\tau)dS_\xi ;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)\, \mu(x_0,t)dS_\xi ;$$

$$\mu(x_0,t) \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)Z(x-\xi,t,x_0,\tau)dS_\xi$$

i odpowiednio grupując, otrzymujemy:

$$R = \left\{ \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(\xi,\tau) - \mu(x_0,\tau)\right] dS_\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(\xi,\tau) - \mu(x_0,\tau)\right] dS_\xi \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(x_0,\tau) - \mu(x_0,t)\right] dS_\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(x_0,\tau) - \mu(x_0,t)\right] dS_\xi \right\} +$$

$$+ \mu(x_0,t) \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau) - Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\right] dS_\xi +$$

$$+ \mu(x_0,t) \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\left[Z(x-\xi,t,x_0,\xi) - Z(x-\xi,t,x,\tau)\right] dS_\xi +$$

$$+ \mu(x_0,t) \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\left[Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau) - Z(x-\xi,t,x_0,\tau)\right] dS_\xi +$$

$$+ \mu(x_0,t)\left| \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x-\xi,t,x,\tau) dS_\xi - \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau) dS_\xi \right|$$

$$= R_1(x,x_0,t) + R_2(x,x_0,t) + R_3(x,x_0,t) + R_4(x,x_0,t) + R_5(x,x_0,t) +$$

$$+ R_6(x,x_0,t).$$

Ponieważ $\mu(x,t)$ jest ciągła, to wszystkie wyrażenia $R_1, R_2 \ldots R_5$ dążą do zera przy $x \to x_0$. Istotnie. Rozpatrzmy $R_1(x,x_0,t)$. Załóżmy, że $x \to x_0$ po normalnej $n_{x_0}$, zewnętrznej. Niech $\varepsilon > 0$ dowolnie małe. Oznaczmy przez $\delta$ taką liczbę, że dla $|\xi - x_0| \leq \delta$ zachodzi $|\mu(\xi,\tau) - \mu(x_0,\tau)| \leq \varepsilon$. Oznaczmy przez $S$ tę część powierzchni $\partial D_0$, które leży wewnątrz kuli $K(x_0,\delta)$, a przez $\sigma$ tę część $\partial D_o$, która leży wewnątrz kuli $K(x_o, 2|x-x_o|)$. Załóżmy, że $2|x-x_o|$. Całkę po powierzchni $\partial D_o$ rozłóżmy na sumę całek po powierzchniach $\sigma$, $S-\sigma$, $\partial D_o - S$ i oszacujemy je

$$\left|\int_0^t d\tau \int_\sigma D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(\xi,\tau)-\mu(x_o,\tau)\right] dS_\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon \int_\sigma dS_\xi \int_0^t \frac{c}{(t-\tau)^{\frac{n+2m-1}{2m}}} \exp\left[-c_1\left(\frac{|x-\xi|^{2m}}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon \int_\sigma \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-1}} \leqslant c.\varepsilon \frac{1}{|x-x_o|^{n-1}} \int_\sigma dS_\xi \leqslant c.\varepsilon.$$

Analogicznie

$$\left|\int_0^t d\tau \int_\sigma D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x_o-\xi,t,\xi,\tau)\left[\mu(\xi,\tau)-\mu(x_o,\tau)\right] dS_\xi\right| \leqslant c.\varepsilon.$$

Dla $\xi \in S-\sigma$ mamy $\frac{1}{2}|x_o-\xi| \leqslant |x-\xi| \leqslant \frac{3}{2}|x_o-\xi|$.
A zatem

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{S-\sigma} D_{T_\xi}^{2m-1}\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau)-Z(x_o-\xi,t,\xi,\tau)\right]\left[\mu(\xi,\tau)-\mu(x_o,\tau)\right] dS_\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon \left|\int_0^t d\tau \int_{S-\sigma} \frac{c|x-x_o|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n+2m-1+\alpha}{2m}}} \left[\exp\left(-c_1\left\{\frac{|x-\xi|^{2m}}{t-\tau}\right\}^{\frac{1}{2m-1}}\right) + \exp\left(-c_2\left\{\frac{|x_o-\xi|^{2m}}{t-\tau}\right\}^{\frac{1}{2m-1}}\right)\right] dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon \left|\int_0^t d\tau \int_{S-\sigma} \frac{c|x-x_o|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n+2m-1+\alpha}{2m}}} \exp\left[-c\left(\frac{|x_o-\xi|^{2m}}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right] dS_\xi\right| \leqslant c.\varepsilon\,|x-x_o|^{\alpha}.$$

Analogicznie

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{\partial D_o - S} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau)-Z(x_o-\xi,t,\xi,\tau)\right]\left[\mu(\xi,\tau)-\mu(x_o,\tau)\right] dS_\xi \leqslant\right.$$

$$\leqslant c(\delta)|x-x_o|^{\alpha}.$$

A zatem $|(R_1)| \leqslant c.\varepsilon$ przy małych $|(x-x_0)|$, czyli dąży do zera przy $|(x-x_0)| \to 0$. Rozpatrzmy $R_2(x,x_0,t)$. Niech $\eta$ będzie taką liczbą, że przy $|t-\tau| < \eta$ mamy $|\mu(x,t) - \mu(x,\tau)| \leqslant \varepsilon$

$$\int_0^{t-\eta} d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau) - Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\right]\left[\mu(x_0,\tau) - \mu(x_0,t)\right] dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant c(\eta)\,|x-x_0|^{\alpha}$$

$$\left|\int_{t-\eta}^{t} \left[\mu(x_0,\tau) - \mu(x_0,t)\right] d\tau \int_{\sigma} D_{T_\xi}^{2m-1}\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau) - Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\right] dS_\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left[\int_{\sigma} dS_\xi \int_{t-\eta}^{t} \frac{c}{(t-\tau)^{\frac{n+2m-1}{2m}}} \exp\left[-c\left(\frac{|x-\xi|^{2m}}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right] d\tau\right. +$$

$$\left. +\varepsilon\int_{\sigma} dS_\xi \int_{t-\eta}^{t} \frac{c}{(t-\tau)^{\frac{n+2m-1}{2m}}} \exp\left[-c\left(\frac{|x_0-\xi|^{2m}}{t-\xi}\right)^{\frac{1}{2m-1}}\right] d\tau \right]\leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon\left[\int_{\sigma} \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-1}} + \int_{\sigma} \frac{dS_\xi}{|x_0-\xi|^{n-1}}\right] \leqslant c.\varepsilon.$$

Analogicznie jak przy oszacowaniu $R_1$

$$\left|\int_{t-\eta}^{t} d\tau \int_{\partial D_0-\sigma} D_{T_\xi}^{2m-1}\left[Z(x-\xi,t,\xi,\tau) - Z(x_0-\xi,t,\xi,\tau)\right]\left[\mu(x_0,\tau)\right] - \left[\mu(x_0,t)\right] dS_\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant c.\varepsilon.$$

Zatem $R_2 \to 0$ przy $x \to x_0$.
Podobnie wykorzystując własności macierzy fundamentalnej dowodzi się, że $R_3, R_4, R_5 \to 0$ przy $x \to x_0$.
Oszacujemy $R_6$. W tym celu rozpatrzmy:

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau) Z(x-\xi,t,x,\tau) dS_\xi = \int_0^t d\tau \int_{D_0} \sum_{j_1\ldots j_{2m}} A^{j_1\ldots j_{2m}}(\xi,\tau) \frac{\partial^{2m} t(x-\xi,t,x,\tau)}{\partial \xi_{j_1}\cdots\partial\xi_{j_{2m}}} d\xi =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{D_0} \frac{\partial Z(x-\xi,t,x,\tau)}{\partial\tau} d\xi = \lim_{\tau\to t} \int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,\tau) d\xi - \int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,0) d\xi.$$

Analogicznie dla:

$$\int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\, Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)dS_\xi .$$

A zatem

$$R_6 = \mu(x_0,t)\Big[\lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,\tau)dS_\xi - \int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,o)d\xi -$$

$$- \lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)d\xi + \int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,o)d\xi\Big] =$$

$$= \mu(x_0,t)\Big\{\Big[\int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,o)d\xi - \int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,o)d\xi\Big] +$$

$$+ \lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,\tau)d\xi - \lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)d\xi\Big\}.$$

Pierwszy składnik dąży do zera przy $x\to x_0$, natomiast

$$\lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x-\xi,t,x,\tau)d\xi = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in D_0 \\ 0 & \text{dla} \quad x\in E^n - D_0 \end{cases}$$

oraz

$$\lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)d\xi = \int_{E_n^*} Z(y,t,x_0,t)dy,$$

gdzie $E_n^*$ półprzestrzeń, której płaszczyzna brzegowa przechodzi przez początek układu współrzędnych. Ale ta całka jest równa połowie całki po całej przestrzeni $E^n$, gdyż funkcja podcałkowa jest parzysta ze względu na zmienną y, czyli

$$\lim_{\tau\to t}\int_{D_0} Z(x_0-\xi,t,x_0,\tau)d\xi = \tfrac{1}{2}.$$

Zatem $R_6 \to \frac{1}{2}\, u(x_0,t)$ przy $x\to x_0$ i $R\to\frac{1}{2}\, u(x_0,t)$ przy $x\to x_0$. Biorąc pod uwagę (5) i oznaczenie R, otrzymujemy:

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D_o^o \\ x_o \in \partial D_o}} \int_o^t d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\mu(x_o,t) + \int_o^t d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi .$$

Tym samym udowodniono twierdzenie, ale przy $x \to x_o$ po normalnej zewnętrznej w punkcie $x_o$.

Analogicznie jak w klasycznej teorii potencjału można udowodnić, że ta własność brzegowa zachodzi przy dowolnym dążeniu $x$ do $x_o$.

Wykorzystując tę własność dla (1) - (3) otrzymujemy, że $\mu(x,t)$ ma spełniać układ równań całkowych Volterrny II rodzaju

$$\mu(x_o,t) + 2\int_o^t d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi = 2\psi(x_o,t) -$$

$$- 2\int_o^t d\tau \int_{D_o} \Gamma(x_o,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi - 2\int_{D_o} \Gamma(x_o,t,\xi,\tau,o)\varphi(\xi)d\xi . \qquad (6)$$

Ponieważ jądro równania (6) spełnia nierówność

$$\left| D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)\right| \leqslant \frac{c\exp\left[-\tilde{c}\,|x_o-\xi|\right]}{(t-\tau)^{\mu}\,|x_o-\xi|^{n+2m(1-\mu)-1}} \qquad o < \mu < 1$$

o słabych osobliwościach, więc istnieje [3] jedyne rozwiązanie równania (6) w postaci:

$$\mu(x_o,t) = -\int_o^t d\tau \int_{\partial D_o} M(x_o,t,\xi,\tau)G(\xi,\tau)d\xi + G(x_o,t),$$

gdzie jądro rozwiązujące jest sumą jąder iterowanych

$$M(x_o,t,\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} N^k(x_o,t,\xi,\tau) \qquad N^1 = N = 2D_{T_\xi}^{2m-1}\,\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)$$

$$N^{k+1}(x_o,t,\xi,\tau) = \int_{\tau}^{t} d\alpha \int_{\partial D_o} N(x_o,t,\beta,\alpha)N^k(\beta,\alpha,\xi,\tau)d\beta$$

$$G(x,t) = 2\Psi(x,t) - 2\int_{o}^{t} d\tau \int_{D_o} \Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi - 2\int_{D_o} \Gamma(x,t,\xi,o)\,\varphi(\xi)d\xi .$$

Podana własność brzegowa dla potencjału warstwy podwójnej jest również prawdziwa dla obszarów niewalcowych i może być wykorzystana do badania rozwiązania równania (1) w obszarze ograniczonym obszarem $B_o$ na hiperpłaszczyźnie $t = 0$ i rozmaitością $S$ w półprzestrzeni $o < t < \infty$ z warunkiem brzegowym

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in B_t^o \\ x_o \in \partial B_t}} u(x,t) = \Psi(x_o,t) \quad \text{dla każdego } t$$

gdzie $B_\tau = D \cap (t = \tau)$ $\partial B_\tau = S \cap (t = \tau)$.
Rozwiązania tego zadania można szukać w postaci

$$\mu(x,t) = \int_{o}^{t} d\tau \int_{B_\tau} \Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi + \int_{B_o} \Gamma(x,t,\xi,o)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{o}^{t} d\tau \int_{\partial B_\tau} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi ,$$

gdzie $dS_\xi$ to element powierzchni $\partial B_\tau$, a $\mu(\xi,\tau)$ odpowiednio dobrana funkcja określona na $S_t = S \cap \left\{0 < \tau < t\right\}$.

<u>Uwaga</u>

W przypadku, gdy rozpatrujemy zewnętrzne zadanie brzegowe (1).

$$\lim_{x \to x_o} V(x,t) = -\frac{1}{2}\mu(x_o,t) + \int_{o}^{t} d\tau \int_{\partial D_o} D_{T_\xi}^{2m-1}(\xi,\tau)\,\Gamma(x_o,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)\,dS_\xi .$$

LITERATURA

[1] Friedman A.: Partial differential equations ot parabolic type. Psentice-Haal, I.N.C., 1964.

[2] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1971.

[3] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. PWN, Warszawa 1970.

НЕКОТОРОЕ СВОЙСТВО ТЕПЛОВОГО ОБОБЩЁННОГО ПОТЕНЦИАЛА
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СТЕПЕНИ 2m

Р е з ю м е

В этой работе мы доказали некоторое граничное свойство обобщённого потенциала

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\,\Gamma(x,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi .$$

Это свойство является некоторым обобщением свойства [2]

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ t>0}} \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial n_\eta} w(x-\eta,t-\tau)dS_\eta = \pm\frac{1}{2} f(\xi,\tau) + \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial n_\eta} w(\xi-\eta,t-\tau)dS_\eta$$

Это свойство [2] применено к решению первой краевой задачи для уравнений теплопроводности.

CERTAIN QUALITY OF THE GENERALIZED THEMAL POTENTIAL
OF DOUBLE SHELL AND ITS APPLICATION TO THE SOLUTION
OF I$^{st}$ BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

S u m m a r y

In the paper was given the boundary property of the generalized thermal potential

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial D_0} D^{2m-1}_{T_\xi}(\xi,\tau)\,\Gamma(x,t,\xi,\tau)\,\mu(\xi,\tau)dS_\xi$$

This quality is the same as boundary property of the thermal potential of double shell [2]

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ t>0}} \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial n_\eta} w(x-\eta,t-\tau)dS_\eta = \pm\frac{1}{2} f(\xi,\tau) + \int_0^t d\tau \int_S f(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial n_\eta} w(\xi-\eta,t-\tau)dS_\eta$$

This property we make use [2] for solving the I$^{st}$ Fourier. Problem for the conductivity equations.

The purpose of this paper is to use this boundary property to the solution of the $I^{st}$ boundary problem for partial differential equation of 2m order of parabolic type.