ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Karol PETHE

OBSZAR WSPÓŁCZYNNIKÓW POCZĄTKOWYCH FUNKCJI P-LISTNYCH W KOLE JEDNOSTKOWYM

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie metody i wyników zawartych w pracy [1], I.E. Bazilewicza, dotyczących funkcji jednolistnych, na klasę funkcji p-listnych.

Niech S_p oznacza klasę funkcji

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \dots \tag{1}$$

regularnych i p-listnych w kole $|z| < 1$.

Korzystając z badanego przez K. Koseki [2] odpowiedniego równania Löwnera dla funkcji $f \in S_p$ oraz pewnego lematu wariacyjnego I.E. Bazilewicza [1] wyznaczymy zbiory wszystkich punktów $M(a_{p+1}, o; a_{p+2}, o)$ i $P(|c_{p+1}|, |c_{p+2}|)$, przyporządkowane funkcjom klasy S_p.

Połóżmy $c_{p+1} = a_{p+1} + i\,b_{p+1}$, $c_{p+2} = a_{p+2} + i\,b_{p+2}$ a następnie przyporządkujmy każdej funkcji $f(z) \in S_p$ odpowiednio punkty $M(a_{p+1}, o; a_{p+2}, o)$ i $P(|c_{p+1}|, |c_{p+2}|)$.

K. Koseki w pracy [2] badał pewną klasę L funkcji p-listnych zdefiniowaną następująco: Funkcja $\hat{f}(z)$ należy do L, jeżeli $\hat{f}(z) = g(z,o)$, gdzie $g(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(z,t)}{\partial z} \cdot z\,\frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}, \qquad o \leq t \leq t_o < \infty \tag{2}$$

spełniającym warunek

$$g(z, t_o) = z^p,$$

gdzie $k(t) = e^{i\theta(t)}$ i $\theta(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w $\langle o, t_o \rangle$ i wykazał, że klasa tych funkcji jest gęsta w klasie S_p.

Współczynniki c_{p+1} i c_{p+2} funkcji $f(z) = e^{pto}\,\hat{f}(z)$, gdzie $\hat{f}(z) \in L$, wyrażają się wzorami

$$\left.\begin{aligned} c_{p+1} &= -2p\int_0^{\infty} e^{-t}\,k(t)dt \\ c_{p+2} &+ 2p(p+1)\left(\int_0^{\infty} e^{-t}k(t)dt\right)^2 \quad -2p\int_0^{\infty} e^{-2t}\,k^2(t)dt, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

zaś ich części rzeczywiste i urojone odpowiednio wzorami

$$\left.\begin{aligned} a_{p+1} &= -2p\int_0^{\infty} e^{-t}\cos Q(t)dt, \qquad b_{p+1} = -2p\int_0^{\infty} e^{-t}\sin Q(t)dt \\ a_{p+2} &= \frac{p+1}{2p}\left(a^2_{p+1} - b^2_{p+1}\right) - 2p\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2\,Q(t)dt \\ b_{p+2} &= \frac{p+1}{p}\,a_{p+1}\,b_{p+1} - 2\,p\int_0^{\infty} e^{-2t}\sin 2\,Q(t)dt \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Powyższe wzory łatwo otrzymać z równania (2).

Niech Y będzie rodziną funkcji $y(t) = e^{-t}\cos Q(t), -e^{-t} \leqslant y(t) \leqslant e^{-t}$, mających w $o \leqslant t < \infty$ co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. I.E. Bazylewicz [1] wykazał następujące lematy:

Lemat 1

Spośród wszystkich funkcji $y(t) \in Y$ spełniających warunek

$$\int_0^{\infty} y(t(dt = C_o = \text{const.},$$

funkcja, dla której całka

$$\int_0^{\infty} y^2(t)dt$$

osiąga najmniejszą wartość, ma postać

$$y_e = \begin{cases} \pm e^{-s} & \text{dla} \quad o \leqslant t \leqslant s \\ \pm e^{-t} & \text{dla} \quad s < t < \infty \end{cases}$$

przy czym s jest stałą tak dobraną, by również

$$\int_0^\infty y_s(t)dt = c_o.$$

Lemat 2

W rodzinie funkcji $y \in Y$ spełniających warunek

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos Q(t) = c_o,$$

najmniejsza wartość całki $\int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 Q(t)dt$ nie ulegnie zmianie przy dodatkowym warunku

$$\int_0^\infty e^{-t} \sin Q(t)dt = o.$$

Twierdzenie 1

W klasie funkcji $f \in S_p$ największa wartość $a_{p+2} = \overline{a_{p+2}}(a_{p+1})$ przy ustalonym a_{p+1} z przedziału $\langle -2p, 2p \rangle$ wyraża się w postaci parametrycznej równościami

$$\left.\begin{aligned} \pm a_{p+1} &= 2p(1+s)\, e^{-s} \\ a_{p+2} &= \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 - 2p(1+2s)\, e^{-2s} + p. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Równości te są spełnione tylko dla funkcji

$$\pm e^{-t} \cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o < t < s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases}$$

i przy tym $b_{p+1} = b_{p+2} = o$.

Dowód

Zauważmy, że wystarczy rozpatrywać a_{p+1} tylko w przedziale o, 2p według wzoru

$$a_{p+1} = 2p \int_0^\infty e^{-t} \cos Q(t)dt,$$

ponieważ zamieniając we wzorach (4) Q na $Q+\pi$, a_{p+1} zamieni się na $-a_{p+1}$; przy czym a_{p+2} nie ulegnie zmianie. Jeżeli następnie we wzorach (4) zamienimy $\cos 2Q$ na $2\cos^2 Q - 1$, wówczas znalezienie największej wartości a_{p+2} przy ustalonym a_{p+1} sprowadza się do wyznaczenia największej wartości prawej strony nierówności

$$a_{p+2} = \frac{p+1}{2p}\left(a_{p+1}^2 - b_{p+1}^2\right) - 4p\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + p \tag{6}$$

przy warunku

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos Q(t)dt = \text{const.}$$

Prawa strona (6) osiągnie swoją największą wartość wtedy, gdy $b_{p+1} = o$ oraz, gdy całka $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$ będzie najmniejsza. Z lematów 1 i 2 wynika, że wówczas funkcją ekstremalną jest funkcja postaci

$$y_e = \begin{cases} e^{-s}, & o < t < s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases}$$

gdzie s jest stałą zależną od a_{p+1}. Jeżeli teraz obliczymy dla tej funkcji a_{p+1} i a_{p+2}, gdy $b_{p+1} = o$, to otrzymamy równości (5), zaś przez odpowiednie podzielenie przedziału $\langle o, \infty)$ na dwie części, w których funkcja $Q(t)$ ma przeciwne znaki otrzymamy, że $b_{p+1} = b_{p+2} = o$. Równanie (5) określa linię ciągłą w płaszczyźnie (a_{p+1}, a_{p+2}).

Twierdzenie 2

Jeżeli $b_{p+1} = o$, to w klasie S_p najmniejsza wartość $a_{p+2} = \underline{a_{p+2}}(a_{p+1})$ przy ustalonym a_{p+1} z przedziału $\langle -2p, 2p\rangle$ wyraża się równaniem

$$\underline{a_{p+2}} = \frac{p+1}{2p}a_{p+1}^2 - p, \tag{7}$$

przy czym wartość ta jest osiągnięta tylko dla takiej funkcji $Q(t)$, która przyjmuje tylko dwie wartości o i π.

Dowód

Dla $b_{p+1} = o$ wzór (6) przyjmuje postać

$$a_{p+2} = \frac{p+1}{2p}a_{p+1}^2 - 4p\int_o^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + p, \tag{8}$$

z którego wynika, że przy a_{p+1} = const., a_{p+2} będzie najmniejsze wówczas, gdy całka $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$ osiągnie największą wartość. Jednakże największa wartość tej całki może być osiągnięta tylko wtedy, gdy $\cos^2 Q \equiv 1$, tj. dla $Q = o, \pi$. Zauważmy następnie, że jeżeli $Q = o, \pi$ to $b_{p+1} = b_{p+2} = o$, zaś a_{p+1} może przyjmować wszystkie wartości z przedziału $\langle -2p, 2p\rangle$. Stąd i wobec (8) otrzymamy równanie (7) twierdzenia.

Twierdzenie 3

W klasie funkcji S_p, krzywe (5) i (7) ograniczają w płaszczyźnie (a_{p+1}, a_{p+2}) obszar zawierający wszystkie punkty $M(a_{p+1}, o; a_{p+2}, o)$ przyporządkowane odpowiednim funkcjom klasy S_p.

Dowód

Z twierdzenia 1 wynika, że spośród krzywych $e^{-t}\cos Q(t) \in Y$, krzywa, dla której przy a_{p+1} = const, $a_{p+2} = \overline{a_{p+2}}$ ma postać

$$y_e = \begin{cases} e^{-s}, & o \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s \leqslant t < \infty, \end{cases} \qquad \text{gdzie} \quad 2p\int_0^\infty y_e\, dt = a_{p+1} \;\; \text{i} \;\; b_{p+1} = o, \tag{9}$$

zaś z twierdzenia 2 przy tych samych warunkach $a_{p+2} = \underline{a_{p+2}}$ jest osiągnięte dla krzywej

$$y_e = \begin{cases} e^{-t}, & o \leqslant t \leqslant s_1 \\ -e^{-t}, & s_1 < t < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Spośród krzywych rodziny Y konstruujemy teraz funkcje

$$y_1(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t \leqslant s_1 \\ -e^{-t}, & s_1 < t < \infty \end{cases}$$

spełniającą warunki

$$2p\int_0^\infty y_1(t)dt = a_{p+1} \;\; \text{i} \;\; b_{p+1} = o.$$

Jeżeli $s = o$, to y_1 pokrywa się z krzywą (10), a z krzywą (9) jeżeli $s_1 = \infty$. Zmieniając teraz w sposób ciągły s_1 od wartości, dla której $s=o$, do $s_1 = \infty$, zachowując warunek a_{p+1} = const., wtedy a_{p+2} będzie się też zmieniać w sposób ciągły od $\underline{a_{p+2}}$ do $\overline{a_{p+2}}$, skąd już wynika, że obszar ograniczony krzywymi (5) i (7) zawiera wszystkie punkty $M(a_{p+1}, o; a_{p+2}, o)$.

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \dots$$

należy do klasy S_p, to

$$|c_{p+2}| \leq p(2p+1). \tag{11}$$

Funkcjami ekstremalnymi są funkcje postaci

$$f(z) = \frac{z^p}{(1 - \varepsilon z)^{2p}}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Dowód

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia $\max\limits_{f \in S_p} |c_{p+2}|$. Nie pomniejszając ogólności możemy przyjąć, że $|c_{p+2}| = a_{p+2}$ i wówczas

$$\max_{f \in S_p} |c_{p+2}| = \max_{f \in S_p} a_{p+2}.$$

Ponieważ równości (5) w twierdzeniu 1 zachodzą bez żadnych ograniczeń na b_{p+1}, więc

$$|c_{p+2}| \leq \max_{f \in S_p} a_{p+2} = \max_{|a_{p+1}| \leq 2p} a_{p+2}(a_{p+1}),$$

a po wyrugowaniu z (5) a_{p+1}

$$|c_{p+2}| \leq \max_{0 \leq s < \infty} (2p\, e^{-2s} \left|(p+1)s^2 + 2p\, s + p\right| + p).$$

Ponieważ

$$\frac{d\, \overline{a_{p+2}}}{ds} = -4\, p(p+1)s\, e^{-s} \left(s + \frac{p-1}{p+1}\right) < 0$$

dla każdego $s > 0$, więc $a_{p+2}(s)$ osiąga swoje maksimum dla $s = 0$, skąd już wynika

$$|c_{p+2}| \leq p(2p+1),$$

tj. nierówność (11) twierdzenia.

Nierówność (11) jest znanym oszacowaniem współczynnika c_{p+2}, jakie uzyskał I.A. Jenkins dla funkcji średnio p-listnych.

Twierdzenie 5

W klasie funkcji S_p największa wartość $|c_{p+2}| = \overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$, przy ustalonym $|c_{p+1}|$ z przedziału $\langle o, 2p\rangle$, jest określona parametrycznie w postaci

$$\left.\begin{aligned} |c_{p+1}| &= 2p(1+s)e^{-s} \\ \overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|) &= \frac{p+1}{2p}|c_{p+1}|^2 - 2p(1+2s)e^{-2s} + p, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

przy czym równości te są zrealizowane dla funkcji

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \le t \le s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases}$$

Dowód

Stosując przekształcenie $e^{-i\alpha}f(z\,e^{i\alpha})$ możemy uzyskać $|c_{p+2}| = a_{p+2}$, zatem znalezienie $\overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$ sprowadza się do wyznaczenia $\overline{a_{p+2}}(|c_{p+1}|)$ wobec tego kładąc w (6) $b^2_{p+1} = |c_{p+1}|^2 - a^2_{p+1}$, otrzymamy

$$a_{p+2} = \frac{p+1}{2p}(2a^2_{p+1} - |c_{p+1}|^2) - 4p\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + p. \quad (13)$$

Zauważmy następnie, że jeżeli $a^2_{p+1} = \text{const.} < |c_{p+1}|^2$, to w myśl lematu 1 najmniejsza wartość całki $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$, bez dodatkowych ograniczeń na funkcje $y(t) = e^{-t}\cos Q(t)$, jest osiągnięta dla funkcji

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \le t \le s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases} \quad (14)$$

natomiast warunek $|c_{p+1}| = \text{const.}$ $(b^2_{p+1} > o)$ może tylko zmniejszyć zbiór dopuszczalnych funkcji $y \in Y$, a więc zwiększyć kres dolny całki $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$. Obliczając dla funkcji (14) prawą stronę (13), otrzymamy

$$\frac{p+1}{2p}(2a^2_{p+1} - |c_{p+1}|^2) - 2p(1+2)e^{-2s} + p \le \overline{a_{p+2}}(|c_{p+1}|) \quad (15)$$

$$|a_{p+1}| = 2p(1+s)e^{-s},$$

i dla wyznaczenia $\overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|) = \overline{a_{p+2}}(|c_{p+1}|)$ przy warunku $a_{p+1}^2 \leqslant |c_{p+1}|^2 =$ $=$ const., wystarczy znaleźć maksimum lewej strony (15) względem $|a_{p+1}|$. Połóżmy

$$g(|a_{p+1}|) = \frac{p+1}{2p}(2\, a_{p+1}^2 - |c_{p+1}|^2) - 2\, p(1 + 2\, s)e^{-2s} + p$$

$$|a_{p+1}| = 2p(1+s)e^{-s}.$$

Ponieważ $s \geqslant o$ i

$$\frac{d\, g(|a_{p+1}|)}{d\,|a_{p+1}|} = \frac{\frac{dg}{ds}}{\frac{d\,|a_{p+1}|}{ds}} = \frac{-8\; p\; s\; e^{-2s}\left((p+1)s+p\right)}{-\,2\; p\; s\; e^{-s}} = 4p^{-s}\left((p+1)s+p\right) > o$$

więc $\max\limits_{|a_{p+1}| \leqslant |c_{p+1}|} g(|a_{p+1}|)$ jest osiągnięte, gdy $|a_{p+1}| = |c_{p+1}|$ stąd i wobec (15) otrzymamy

$$\overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|) = \frac{p+1}{2p}|c_{p+1}|^2 - 2p(1+2s)e^{-2s} + p$$

$$|c_{p+1}| = 2p(1+s)e^{-s},$$

tj. równości (12) twierdzenia.

Twierdzenie 6

W klasie funkcji $f \in S_p$ najmniejsza wartość $|c_{p+2}| = \underline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$, przy ustalonym $|c_{p+1}|$ z przedziału $< o,\, 2\, p >$ wyraża się równaniem

$$\underline{|c_{p+2}|} = \max \begin{cases} o \\ \frac{p+1}{2p}\,|c_{p+1}|^2 - p. \end{cases} \tag{16}$$

Dowód

Nie pomniejszając ogólności możemy przyjąć, że $b_{p+1} = o$, i korzystając ze wzorów (4), otrzymamy

$$|c_{p+2}|^2 = a_{p+2}^2 + b_{p+2}^2 = \left(\frac{p+1}{2p}\, a_{p+1}^2 + I_1\right)^2 + I_2^2,$$

gdzie:

$$I_1 = -2p \int_o^\infty e^{-2t} \cos 2\, Q(t)dt, \quad I_2 = -2\, p \int_o^\infty e^{-2t} \sin 2\, Q(t)dt.$$

Jeżeli:

a) $\frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 \geqslant \max |I_1| = p$, wówczas $|c_{p+2}|$ osiągnie najmniejszą wartość gdy $I_2 = 0$ i $I_1 = -p$, przy czym równości te będę zrealizowane dla

$$\cos^2 Q(t) \equiv 1 \quad \text{przy warunku} \quad 2p \int_0^{\infty} e^{-t} \cos Q(t)dt = |c_{p+1}|,$$

b) $\frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 < p$, to wtedy zawsze można znaleźć taką funkcję $Q(t)$, dla której $|c_{p+2}| = 0$.

Z a) i b) wynika więc równość (16) twierdzenia.

Twierdzenie 7

W klasie funkcji S_p zbiór punktów płaszczyzny $(|c_{p+1}|, |c_{p+2}|)$, ograniczony osiami układu i krzywymi (12) i (16) zawiera wszystkie punkty $p(|c_{p+1}|, |c_{p+2}|)$.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 3.

LITERATURA

[1] Bazylewicz I.E.: Zum koeffizientenproblem der schlichten Funktionen. Matem. Sb. 1(43):2 (1963) 211-228.

[2] Koseki K.: Uber die p-wertigen Funktionen Math. Journal of Okayama University. 60, 1-2 1960/61.

ОБЛАСТЬ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ Р-ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ
В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Р е з ю м е

В этой статье показывается, что результаты, полученные И.Е. Базилевичем, касающиеся области начальных коэффициентов однолистных функций, легко переносятся на класс р-листных функций.

THE DOMAIN OF THE FIRST COEFFICIENTS OF THE
P-VALENT FUNCTIONS IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

In this paper has been transfered the method of I.E. Bazylewicz concerning the domain of the first coefficients of the univalent functions into the class of the p-valent functions.