ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Karol PETHE

# MAKSIMUM FUNKCJONAŁU $|c_3| - |c_2|$ W KLASIE FUNKCJI $S_M$ I $S_M^{-1}$

Streszczenie. W pracy otrzymano ostre oszacowanie funkcjonału $|c_3| - |c_2|$ określonego w klasie $S_M$ i $S_M^{-1}$, korzystając z twierdzeń Tw. 1, Tw. 5 i Tw. 12, wykazanych w pracy [1].

Niech $S_M$ oznacza klasę funkcji

$$w = f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \tag{1}$$

regularnych i jednolistnych w kole $|z| < 1$, spełniających warunek $|f(z)| < M$, gdzie $M = \text{const.} > 1$. $S_M^{-1}$ klasę funkcji odwrotnych mających w dostatecznie małym otoczeniu punktu $w = o$ rozwinięcie

$$z = \Psi(w) = w + c'_2 w^2 + c'_3 w^3 + \dots \tag{2}$$

Wychodzimy z parametrycznego przedstawienia współczynników funkcji (1) wzorami

$$c_2 = -2 \int_0^T e^{-t} k(t)dt,$$

$$c_3 = c_2^2 - 2 \int_0^T e^{-2t} k^2(t)dt, \tag{3}$$

w których $k(t) = e^{-iQ(t)}$ i $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w $\langle o, T\rangle$, gdzie $T = \ln M$. Wzory te otrzymuje się z równania Loewnera

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -z \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} \frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}$$

i nierówności $|e^T f(z,t)| < M$, która wynika z przynależności funkcji

$$e^T f(z,T) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

do klasy $S_M$. Kładąc $c_2 = a_2 + i\, b_2$, $c_3 = a_3 + i\, b_3$ ze wzorów (3) otrzymamy

$$a_2 = -2\int_0^T e^{-t}\cos Q(t)dt, \quad b_2 = -2\int_0^T e^{-t}\sin Q(t)dt$$
$$a_3 = (a_2^2 - b_2^2) - 2\int_0^T e^{-2t}\cos 2Q(t)dt, \quad b_3 = 2a_2b_2 - 2\int_0^T e^{-2t}\sin 2Q(t)dt. \tag{4}$$

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z = c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$$

należy do klasy $S_M$ i $1 < M \leqslant \frac{4e}{4-e}$, to

$$|c_3| - |c_2| \leqslant 1 - \frac{1}{M^2}. \tag{5}$$

Znak równości realizują odpowiednio funkcje

$$\frac{f(z)}{1 - \varepsilon\frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1 - \varepsilon z^2}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Jeżeli $M > \frac{4e}{4-e}$, to

$$|c_3| - |c_2| \leqslant (4s_1^2 + 4s_1 + 2)e^{-2s} - 2(1+s_1)^{-s_1}\left(1 + \frac{4}{M}\right) + 1 + \frac{2}{M} + \frac{5}{M^2},$$

gdzie $s_1$ jest mniejszym pierwiastkiem równania

$$-4\, s\, e^{-s} + 1 + \frac{4}{M} = 0.$$

W klasie funkcji $f \in S_M$ istnieje funkcja, dla której zachodzi równość w (6).

Dowód

Mamy więc zadanie wyznaczyć

$$\max_{f \in S_M} (|c_3| - |c_2|). \tag{7}$$

W tym celu wyznaczymy najpierw największą wartość $(|c_3| - |c_2|)$ przy ustalonym $|c_2|$ z przedziału $\langle 0, 2(1 - \frac{1}{M})\rangle$, a następnie zmieniając $|c_2|$ w tym przedziale, wyznaczymy (7).

Zauważmy następnie, że znalezienie w $S_M$ największej wartości $(|c_3| - |c_2|)$ przy ustalonym $|c_2|$ sprowadza się do wyznaczenia największej wartości $|c_3| = \overline{|c_3|}(|c_2|)$ przy ustalonym $|c_2|$ z przedziału $\langle 0, 2(1 , \frac{1}{M})\rangle$.

Zauważmy następnie, że z Tw. 5 [1], dla p = 1, wynika:

Jeżeli $M \leq \sqrt{e}$, to największą wartość $\overline{|c_3|}$ w klasie $S_M$ przy ustalonym $|c_2|$ określa się równaniem

$$\overline{|c_3|} = 1 - \frac{1}{M^2} - |c_2|^2. \tag{8}$$

Jeżeli $M > e^2$, to dla $0 \leq s \leq \ln M$ $\overline{|c_3|}$ jest określona parametrycznie w postaci

$$\left.\begin{aligned} |c_2| &= 2\left((1+s)e^{-s} - \frac{1}{M}\right) \\ \overline{|c_3|} &= |c_2|^2 - 2(1+2s)e^{-2s} + 1 + \frac{1}{M^2} \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} |c_2| &= 2e^{-s} \ln M \\ \overline{|c_3|} &= |c_2|^2 - 4e^{-2s} \ln M + 1 - \frac{1}{M^2} \end{aligned}\right\} \tag{8''}$$

dla $s > \ln M$.

Jeżeli zatem

1° $M < \sqrt{e}$, to w myśl (8) mamy

$$|c_3| - |c_2| \leq \overline{|c_3|}(|c_2|) - |c_2| = -|c_2|(|c_2| + 1) + 1 \, , \, \frac{1}{M^2}.$$

Zmieniając teraz $|c_2|$ w $\langle 0, 2(1 - \frac{1}{M})\rangle$ łatwo zauważyć, że prawa strona powyżej nierówności będzie maksymalna, gdy $|c_2| = 0$, więc

$$|c_3| - |c_2| \leq 1 - \frac{1}{M^2}, \tag{9}$$

a funkcje, dla których zachodzi równość mają postać

$$\frac{f(z)}{1 - \varepsilon \frac{f^2(z)}{M^2}} = \frac{z}{1 - \varepsilon z^2}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

$2^o$ $2 \leq M \leq e$ wówczas wobec (8') i (8") należy rozpatrzyć dwa przypadki:

a) jeżeli $o \leq s \leq \ln M$, to wobec (8')

$$\begin{cases} |c_3| - |c_2| \leq |c_2|^2 - 2(1+2s)e^{-2s} + 1 + \frac{1}{M} - |c_2| \\ |c_2| = 2\left((1+s)e^{-s} - \frac{1}{M}\right). \end{cases}$$

skąd

$$|c_3| - |c_2| \leq \max_{o \leq s \leq \ln M} \varphi_1(s), \tag{10}$$

gdzie

$$\varphi_1(s) = (4s^2+4s+2)e^{-2s} - 2(1+s)e^{-s}\left(1 + \frac{4}{M}\right) + 1 + \frac{2}{M} + \frac{5}{M^2}$$

Nadto

$$\varphi_1'(s) = 2\ s\ e^{-s}\ .\ V_1(s),$$

gdzie

$$V_1(s) = -4\ s\ e^{-s} + 1 + \frac{4}{M}.$$

Ponieważ dla $2 \leq M \leq e$

$$V_1(o) = 1 + \frac{4}{M} > o, \quad V_1(\ln M) = \frac{4}{M}(1 - \ln M) + 1 > o$$

i

$$V_1'(s) = 4\ e^{-s}(s-1) < o, \quad \text{więc} \quad V_1(s) > o \quad \text{oraz} \quad \varphi_1'(s) > o$$

zatem

$$\max_{o \leq s \leq \ln M} \varphi_1(s) = \varphi_1(\ln M) = \frac{4 \ln^2 M}{M^2} - \frac{4 \ln M}{M^2} - \frac{2 \ln M}{M} + 1 - \frac{1}{M^2} \tag{11}$$

b) jeżeli $s > \ln M$, to w myśl (8")

$$\begin{cases} |c_3| - |c_2| \leq |c_2|^2 - 4\ e^{-2s} \ln M + 1 - \frac{1}{M^2} - |c_2| \\ |c_2| = 2\ e^{-s} \ln M \end{cases}$$

skąd

$$|c_3| - |c_2| \leq \max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s), \tag{10'}$$

gdzie

$$\varphi_2(s) = 4\, e^{-2s} \ln M - 4\, e^{-2s} \ln M - 2\, e^{-s} \ln M + 1 - \frac{1}{M^2}.$$

Pochodna

$$\varphi_2'(s) = 2\, e^{-s} \ln M(-4 \ln M \,.\, e^{-s} + 4\, e^{-s} + 1)$$

ma taki sam znak co funkcja

$$V_2(s) = -4\, e^{-s} \ln M + 4\, e^{-s} + 1.$$

Ponieważ dla $2 \le M \le e$, $V_2(\ln M) = \frac{4}{M}(1-\ln) + 1 > o$, $V_2(\infty) = 1$ i $V_2'(s) = 4\, e^{-s}(\ln M-1) < o$, wobec tego $V_2(s) > o$ a więc i $\varphi_2'(s) > o$, zatem

$$\max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s) = \varphi_2(\infty) = 1 - \frac{1}{M^2} \tag{11}$$

Porównując następnie (11) i (11') łatwo zauważyć, że $\max(\varphi_1(\ln M), \varphi_2(\infty)) = \varphi_2(\infty)$, a stąd i wobec (10) i (10') otrzymujemy, że

$$|c_3| - |c_2| \le 1 - \frac{1}{M^2}, \quad \text{dla} \quad 2 \le M \le e. \tag{12}$$

$3^o$ $M > e$, to analogicznie jak w $2^o$ rozważamy dwa przypadki:

a) jeżeli $o \le s \le \ln M$, to wtedy również

$$|c_3| - |c_2| \le \max_{o \le s \le \ln M} \varphi_1(s),$$

gdzie

$$\varphi_1(s) = (4\, s^2 + 4s + 2)e^{-2s} - 2(1+s)e^{-s}(1 + \frac{4}{M}) + 1 + \frac{2}{M} + \frac{5}{M^2}.$$

i

$$\varphi_1'(s) = 2\, s\, e^{-s}(V_1(s)),$$

$$V_1(s) = -4\, s\, e^{-s} + \frac{4}{M} + 1.$$

Badamy najpierw wartości graniczne $V_1(s)$

$$V_1(o) = 1 + \frac{4}{M} > 0, \quad \text{zaś} \quad V_1(\ln M) = \frac{4}{M}(1-\ln M) + 1$$

jako funkcja $M > 1$, posiada minimum w $M = e^2$, a ponieważ $V_1(q) = -\frac{4}{e^2} + 1 > o$, więc również $V_1(\ln M) > o$, dla każdego $M > e$. Badając następnie pochodną $V_1'(s)$ stwierdzamy, że funkcja $V_1(s)$ ma minimum w punkcie $s = 1$, zatem znak funkcji $V_1(s)$ a więc i $\varphi_1'(s)$ zależy od wartości wyrażenia

$$V_1(1) = -\frac{4}{e} + \frac{4}{M} + 1.$$

Jeżeli więc $e < M \leqslant \frac{4e}{4-e}$, wówczas $V_1(1) \geqslant o$, a stąd i wobec tego, że $V_1(o) > o$, $V_1(\ln M) > o$ wynika, że $\varphi_1'(s) > o$, zatem

$$\max_{o \leqslant s \leqslant \ln M} \varphi_1(s) = \varphi_1(\ln M) = \frac{4\ln^2 M}{M^2} - \frac{4\ln M}{M^2} - \frac{2\ln M}{M} + 1 - \frac{1}{M^2} \quad (13)$$

Jeżeli $M > \frac{4e}{4-e}$ to $V_1(1) < o$, a ponieważ $V_1(o) > o$ i $V_1(\ln M) > o$, więc równanie

$$V_1(s) = -4s\, e^{-s} + 1 + \frac{4}{M} = o$$

ma dwa dodatnie pierwiastki $s_1$, $s_2$.
Ponieważ dla $s > o$ i bliskich zeru $\varphi_1'(s) > o$, to $\max\limits_{o \leqslant s \leqslant \ln M} \varphi_1(s)$ jest osięgnięte dla mniejszego pierwiastka $s_1$, czyli

$$\max_{o \leqslant s \leqslant \ln M} \varphi_1(s) = \varphi_1(s_1) = (4s_1^2 + 4s_1 + 2)e^{-2s_1} - 2(1+s_1)e^{-s_1}\left(1 + \frac{4}{M}\right) + 1 + \frac{2}{M} + \frac{5}{M^2}$$

b) jeżeli $s > \ln M$ wtedy jak w $2^o$, b), (10')

$$|c_3| - |c_2| \leqslant \max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s).$$

Ponieważ $V_2(\infty) = 1$ oraz dla $M > e$ $V_2(\ln M) > o$ i $V_2'(s) = 4\, e^{-s}(\ln M - 1) > o$, wobec tego $V_2(s) > o$, a zatem i $\varphi_2'(s) > o$, skąd mamy

$$\max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s) = \varphi_2(\infty) = 1 - \frac{1}{M^2}$$

Z porównania (13), (13') i (14) wynika

$$\varphi_1(\ln M) < \varphi_2(\infty) < \varphi_1(s_1),$$

a stąd

$$|c_3| - |c_2| \begin{cases} 1 - \frac{1}{M^2} & \text{dla} \quad e < M \leqslant \frac{4e}{4-e} \\ (4s_1^2 + 4s_1 + 2)e^{-2s_1} - 2(1+s_1)e^{-s_1}\left(1 + \frac{4}{M}\right) + 1 + \\ \quad + \frac{2}{m} + \frac{5}{M^2} & \text{dla} \quad M > \frac{4e}{4-e} \end{cases} \quad (15)$$

$4^o$ $\sqrt{e} < M < 2$. Nie pomniejszając ogólności możemy przyjąć, że $c_3 \geqslant 0$ i $Re(c_2) \geqslant 0$, wtedy

$$|c_3| - |c_2| = a_3 - \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \leqslant a_3 - a_2. \tag{16}$$

Więc w rozważanym przypadku zadanie sprowadza się do wyznaczenia

$$\max_{f \in S_M} (a_3 - a_2).$$

Wyznaczmy najpierw największą wartość $(a_3 - a_2)$ przy ustalonym $a_2$ z przedziału $\langle 0, 2(1 - \frac{1}{M}) \rangle$, co jest równoważne znalezieniu największej wartości $a_3 = \overline{a_3(a_2)}$ przy $a_2 = \text{const.}$, lecz w myśl Tw. 1 [1] $\overline{a_3(a_2)}$ określa się parametrycznie równościami

$$\begin{aligned} a_2 &= 2\left((1+s)e^{-s} - \frac{1}{M}\right) \\ \overline{a_3} &= a_3^2 - 2(1+2s)e^{-2s} + 1 + \frac{1}{M^2} \end{aligned} \tag{17}$$

dla $0 < s \leqslant \ln M$ i

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 2 \ln M \, . \, e^{-s} \\ a_3 &= a_2^2 - 4\, e^{-2s} \ln M + 1 - \frac{1}{M^2} \end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

dla $s > \ln M$.

Jeżeli zatem

a) $0 \leqslant s \leqslant \ln M$, to wobec (17)

$$|c_3| - |c_2| \leqslant \overline{a_3(a_2)} - a_2 = \max_{0 \leqslant s \leqslant \ln M} \varphi_1(s),$$

gdzie

$$\varphi_1(s) = (4s^2+4s+2)e^{-2s} - 2(1+s)e^{-s}\left(1 + \frac{4}{M}\right) + 1 + \frac{2}{M} + \frac{5}{M^2} \tag{18}$$

b) $\ln M < s < \infty$, to w myśl (17')

$$|c_3| - |c_2| \leqslant \overline{a_3(a_2)} - a_2 = \max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s),$$

gdzie

$$\varphi_2(s) = 4e^{-2s} \ln^2 M - 4e^{-2s} \ln M - 2e^{-s} \ln M + 1 - \frac{1}{M^2}. \tag{18'}$$

Zauważmy następnie, że funkcje (18) i (18') zachowują się, dla $\sqrt{e} < M < 2$, analogicznie co funkcje $\varphi_1(s)$ i $\varphi_2(s)$ w przypadku $2^o$, wobec tego

$$\max_{0 \le s \le \ln M} \varphi_1(s) = \varphi_1(\ln M) \quad \text{i} \quad \max_{\ln M < s < \infty} \varphi_2(s) = \varphi_2(\infty),$$

a ponieważ $\varphi_2(\infty) > \varphi_1(\ln M)$, więc jeżeli $\sqrt{e} < M < 2$, to

$$|c_3| - |c_2| \le 1 - \frac{1}{M^2}. \tag{19}$$

Ostatecznie z (9), (12), (15) i (19) wynika nierówność (5) twierdzenia, zaś z (15) nierówność (6) twierdzenia.

Pozostaje jeszcze wykazać, że nierówność (6) jest również jak nierówność (5) oszacowaniem ostrym badanego funkcjonału.

W tym celu konstruujemy funkcję

$$k(t) = \begin{cases} e^{t-s_1} + i\sqrt{1 - e^{2(t-s_1)}}, & 0 \le t \le \beta, \\ e^{t-s_1} - i\sqrt{1 - e^{2(t-s_1)}}, & \beta < t \le s_1 \\ 1 & s_1 < t \le \ln M \end{cases} \tag{20}$$

gdzie $\beta$ jest pierwiastkiem równania

$$\int_0^\beta e^{-t}\sqrt{1 - e^{2(t-s_1)}}\,dt - \int_\beta^{s_1} e^{-t}\sqrt{1 - e^{2(t-s_1)}}\,dt = 0.$$

Przy tak dobranej wartości $\beta$, obliczając dla funkcji (20) $|c_3| - |c_2|$, otrzymamy prawą stronę (6), oznacza to, że w klasie $S_p$ istnieje funkcja $f(z)$ przyporządkowana funkcji (20), dla której w (6) zachodzi równość, co kończy dowód twierdzenia.

Wyznaczymy teraz $\max\limits_{\Psi(w) \in S_M^{-1}} (|c_3'| - |c_2'|)$, korzystając z Tw. 12 [1].

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja

$$\Psi(w) = w + c_2'w^2 + c_3'w^3 + \ldots$$

należy do klasy $S_M^{-1}$, to

$$|c_3'| - |c_2'| \leqslant \begin{cases} 1 - \frac{1}{M^2}, & \text{jeżeli} \quad |c_2'| < 1 \\ 3 - \frac{6}{M} + \frac{3}{M^2}, & \text{jeżeli} \quad 1 < |c_2'| \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{cases} \tag{21}$$

Znak równości realizują odpowiednio funkcje

$$\frac{(w)}{1 - \varepsilon\Psi^2(w)} = \frac{w}{1 - \varepsilon\frac{w^2}{M^2}}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad \text{jeżeli} \quad |c_2'| \leqslant 1$$

$$\frac{(w)}{(1 - \varepsilon\Psi(w))^2} = \frac{w}{\left(1 - \varepsilon\frac{w}{M}\right)^2}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad \text{jeśli} \quad 1 < |c_2'| \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Dowód

Ponieważ $c_2' = -c_2$ i $c_3' = -c_3 + 2c_2^2$, więc analogicznie jak w twierdzeniu 1, problem znalezienia $\max\limits_{\Psi(w)\in S_M^{-1}}(|c_3'| - |c_2'|)$, sprowadzamy najpierw do znalezienia największej wartości $|c_3'| = \overline{|c_3'|}(|c_2'|)$ przy ustalonym $|c_2'|$ z przedziału $\langle 0, 2(1 - \frac{1}{M})\rangle$. Zatem w myśl Tw. 12 [1] $\overline{|c_3'|}(|c_2'|)$ przy $|c_2'|$ = const. wyraża się równaniem

$$\overline{|c_3'|} = |c_2'|^2 + 1 - \frac{1}{M^2},$$

skąd otrzymujemy

$$|c_3'| - |c_2'| \leqslant \overline{|c_3'|} - |c_2'| \leqslant \max_{|c_2'| \leqslant 2(1 - \frac{1}{M})} U(|c_2'|), \tag{22}$$

gdzie

$$U(|c_2'|) = |c_2'|^2 - |c_2'| + 1 - \frac{1}{M^2}.$$

Jeżeli zatem

a) $|c_2'| \leqslant 1$, to

$$U(|c_2'|) = |c_2'|(|c_2'| - 1) + 1 - \frac{1}{M^2} \leqslant 1 - \frac{1}{M^2}$$

więc

$$|c_3'| - |c_2'| \leqslant 1 - \frac{1}{M^2}.$$

przy czym równość realizują funkcje postaci

$$\frac{(w)}{1-\varepsilon\Psi^2(w)} = \frac{w}{1-\varepsilon\frac{w^2}{M^2}}, \qquad |\varepsilon| = 1$$

b) $1 < |c_2'| \leqslant 2(1-\frac{1}{M})$, wówczas $U(|c_2'|)$ jest funkcją rosnącą, więc swoją największą wartość osiąga dla $|c_2'| = 2(1-\frac{1}{M})$. Stąd i wobec (22) mamy

$$|c_3'| - |c_2'| \leqslant 3 - \frac{6}{M} + \frac{3}{M^2}$$

i równość zachodzi dla funkcji

$$\frac{(w)}{(1-\varepsilon\Psi(w))^2} = \frac{w}{(1-\varepsilon\frac{w}{M})^2}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

LITERATURA

[1] Bazylewicz I.E.: Obłasti naczalnych koefficientow ograniczennych odnolistnych funkcji p-kratnoj simetrii Mat. Sbornik T. 43(85):4 (1957).

МАКСИМУМ ФУНКЦИОНАЛА $|c_3| - |c_2|$ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ $S_M$ и $S_M^{-1}$

Р е з ю м е

Исходя из работы И.Е. Базилевича, касающиеся области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций получается точную оценку сверху для $|c_3| - |c_2|$.

MAXIMUM OF THE FUNCTIONAL $|c_3| - |c_2|$ IN THE CLASS OF $S_M$ AND $S_M^{-1}$

S u m m a r y

In this paper has been got a sharp estimation of the functional $|c_3| - |c_2|$ with the help of the Loewner method.