ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Karol PETHE

OSZACOWANIE FUNKCJONAŁÓW $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$, $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$ FUNKCJI P-LISTNYCH W KOLE JEDNOSTKOWYM

Streszczenie. W pracy otrzymano ostre oszacowanie z góry funkcjonałów $|c_{p+2} - c_{p+1}^2|$, przy dowolnym α, i $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$, określonych w klasie S_p oraz ostre oszacowanie z dołu funkcjonału $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$.

Niech S_p będzie klasą funkcji

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \ldots \tag{1}$$

regularnych i p-listnych w kole $|z| < 1$.

Będziemy korzystać z twierdzeń 5 i 6 zawartych w pracy [3] autora oraz następującego przedstawienia współczynników

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= -2p \int_0^\infty e^{-t} k(t)dt \\ c_{p+2} &= 2p(p+1)\left(\int_0^\infty e^{-t} k(t)dt\right)^2 - 2p \int_0^\infty e^{-2t} k^2(t)dt, \end{aligned} \tag{2}$$

w których $k(t) = e^{iQ(t)}$ i $Q(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w $0 \leqslant t \leqslant t_0 < \infty$. Wzory (2) łatwo otrzymuje się z równania

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = z \frac{\partial g(z,t)}{\partial z} \frac{1 + k(t) z}{1 - k(t) z},$$

które badał K. Koseki [2] dla pewnej klasy L, funkcji p-listnych, gęstej w klasie S_p.

Oddzielając we wzorach (2) części rzeczywiste i urojone otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} a_{p+1} &= -2p\int_0^{\infty} e^{-t}\cos Q(t)\,dt, \qquad b_{p+1} = -2p\int_0^{\infty} e^{-t}\sin Q(t)\,dt. \\ a_{p+2} &= \frac{p+1}{2p}\left(a_{p+1}^2 - b_{p+1}^2\right) - 2p\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos 2Q(t)\,dt \\ b_{p+2} &= \frac{p+1}{p}\, a_{p+1}b_{p+1} - 2p\int_0^{\infty} e^{-2t}\sin 2Q(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

§ 1. MAKSIMUM FUNKCJONAŁU $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1}\, z^{p+1} + c_{p+2}\, z^{p+2} + \dots$$

należy do klasy S_p i $\alpha < \frac{1+p}{2p}$, wówczas

1^o jeżeli $\alpha \leqslant \frac{p-1}{2p}$, to

$$\left|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2\right| \leqslant p(2p+1 - 4p\alpha), \tag{1.1}$$

przy czym znak równości realizują funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-\varepsilon z)^{2p}}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

2^o jeżeli $\frac{p-1}{2p} < \alpha < \frac{p+1}{2p}$, to

$$\left|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2\right| \leqslant p\,.\left(2\,.\,e^{-\frac{2p\alpha-(p-1)}{1+p-2p\alpha}} + 1\right), \tag{1.2}$$

przy czym istnieje funkcja $f(z) \in S_p$, dla której zachodzi równość.

Dowód

Zauważmy, że dla znalezienia $\max\limits_{f \in S_p}\left|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2\right|$, wystarczy wyznaczyć $\max\limits_{f \in S_p} \mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2)$, ponieważ przekształcenie $e^{-i\beta}f(z\, e^{i\beta})$, β - dowolna liczba rzeczywista, nie wyprowadza funkcji $f(z)$ z klasy S_p, zaś przy odpowiednim dobranym β

$$\max_{f \in S_p} \operatorname{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2) = |c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|.$$

Korzystając ze wzorów (3) otrzymujemy

$$\operatorname{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2) = \left(\frac{p+1}{2p} - \alpha\right)(a_{p+1}^2 - b_{p+1}^2) - 4p\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt + p = I \tag{1.3}$$

i zadanie sprowadza się do wyznaczenia w klasie S_p największej wartości prawej strony (1.3).

Wykażemy najpierw następujący lemat.

Lemat 1

W klasie S_p największa wartość $I = \overline{I(a_{p+1})}$ przy ustalonym a_{p+1} z przedziału $<-2p,2p>$ wyraża się parametrycznie w postaci

$$\left.\begin{aligned} a_{p+1} &= 2p(1+s)e^{-s} \\ \overline{I(a_{p+1})} &= \left(\frac{p+1}{2p} - \alpha\right) a_{p+1}^2 - 2p(1+2s)e^{-2s} + p. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Równości te są spełnione tylko dla funkcji

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \leq t \leq s \\ e^{-t}, & s < t < \infty, \end{cases}$$

i wtedy $b_{p+1} = o$.

Dowód

Nie zawężając zagadnienia, wystarczy rozważać a_{p+1} tylko z przedziału $<o,2p>$ według wzoru

$$a_{p+1} = 2p\int_0^\infty e^{-t}\cos Q(t)dt,$$

ponieważ, zamieniając w (3) Q na $Q+\pi$, a_{p+1} zmieni się na $-a_{p+1}$, zaś $\operatorname{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2)$ nie ulegnie zmianie.

Prawa strona (1.3) osiągnie swoją największą wartość, gdy $b_{p+1} = o$ oraz gdy całka $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$ przy warunku $\int_0^\infty e^{-t}\cos Q(t)dt = \text{const.}$ będzie najmniejsza. Z lematów 1 i 2 I.E. Bazilewicza wykazanych w [1] i danych w [3] wynika, że wówczas funkcją ekstremalną jest funkcja

$$e^{-t}\cos Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t < \infty, \end{cases} \tag{1.5}$$

gdzie s jest stałą zależną od a_{p+1}.

Obliczając teraz dla (1.5) a_{p+1} i prawą stronę (1.3) przy $b_{p+1} = o$ otrzymamy równości (1.4), zaś przez odpowiednie rozbicie przedziału $o \leqslant s < \infty$ na dwie części, w których funkcja Q ma przeciwne znaki, otrzymamy również $b_{p+1} = o$. Oznacza to, że równości (1.4) zostały otrzymane bez żadnych ograniczeń na b_{p+1}.

Zatem

$$\max_{f \in S_p} \operatorname{Re}(c_{p+1} - \alpha c_{p+1}^2) = \max_{|a_{p+1}| \leqslant 2p} \overline{I(a_{p+1})},$$

a stąd i wobec (1.4) oraz (1.3) wynika, że

$$\operatorname{Re}(c_{p+1} - \alpha c_{p+1}^2) \leqslant \max_{o \leqslant s < \infty} \varphi(s), \tag{1.6}$$

$$\varphi(s) = 2p\left((1+p) - 2\,p)s^2 + 2p(1-2\alpha)s + p(1-2\alpha)\right)e^{-2s} + p$$

Nadto

$$\varphi'(s) = 2\,s\,e^{-2s}\left(-(\frac{1+p}{2p} - \alpha)s + \alpha - \frac{p-1}{2p}\right).$$

Jeżeli zatem

1^o $\alpha \leqslant \frac{p-1}{2p}$, to ponieważ $\frac{p-1}{2p} < \frac{p+1}{2p}$, więc $\varphi'(s) < o$ dla $o < s < \infty$, wobec tego funkcja $\varphi(s)$ osiąga swoje maksimum dla $s = o$. Stąd i wobec (1.6) otrzymujemy, że

$$\operatorname{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2) \leqslant p(2p+1 - 4p\,.\,\alpha).$$

Zauważmy jeszcze, że dla funkcji

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-\varepsilon z)^{2p}} = z^p + 2p\varepsilon z^{p+1} + p(2p+1)\varepsilon^2 z^{p+2} + \ldots$$

$$|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2| = p(2p+1 - 4\alpha p),$$

więc tym samym nierówność (1.1) została wykazane.

2^{o} $\frac{p-1}{2p} < \alpha < \frac{p+1}{2p}$, to ponieważ $\varphi'(s) > o$ dla $s < \dfrac{\alpha - \frac{p-1}{2p}}{\frac{1+p}{2p} - \alpha}$ i $\varphi'(s) < o$

dla $s > \dfrac{\alpha - \frac{p-1}{2p}}{\frac{1+p}{2p} - \alpha}$ więc funkcja $\varphi(s)$ osiąga swoje maksimum dla $s = \dfrac{\alpha - \frac{p-1}{2p}}{\frac{p+1}{2p} - \alpha}$,

zatem w myśl (1.6) mamy

$$\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^{2}) \leqslant p\left(2e^{-\frac{2\alpha - (p-1)}{p+1 - 2\alpha}} + 1\right),$$

stąd już wynika nierówność (1.2) twierdzenia.

Pozostało jeszcze wykazać, że nierówność (1.2) daje ostre oszacowanie funkcjonału $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^{2}|$. W tym celu konstruujemy funkcję

$$k(t) = \begin{cases} e^{t-s(\alpha,p)} + i\sqrt{1 - e^{2t-s(\alpha,p))}}, & o \leqslant t \leqslant \gamma \\ e^{t-s(\alpha,p)} - i\sqrt{1 - e^{2(t-s(\alpha,p))}}, & \gamma < t \leqslant s(\alpha,p) \\ 1 & t > s(\alpha,p) \end{cases} \tag{1.7}$$

gdzie $s(\alpha,p) = \frac{2 - (p-1)}{p + 1 - 1}$ i γ jest pierwiastkiem równania

$$\int_{o}^{\gamma} e^{-t} \cdot \sqrt{1 - e^{2(t-s(\alpha,p))}}\, dt - \int_{\gamma}^{s(\alpha,p)} e^{-t} \sqrt{1 - e^{2(t-s(\alpha,p))}}\, dt = o.$$

Przy tak dobranej wartości γ dla funkcji (1.7) mamy

$$\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}) = p(2 \cdot e^{-\frac{2\alpha-(p-1)}{p+1 - 2\alpha}} + 1),$$

więc istnieje funkcja $f(z) \in S_p$ przyporządkowana funkcji (1.7), dla której w (1.2) zachodzi równość.

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^{p} + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \ldots$$

należy do klasy S_p i $\alpha \geqslant \frac{p+1}{2p}$, to

$$|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^{2}| \leqslant p\,(4p\alpha - (2p+1))$$

przy czym znak równości realizują odpowiednio funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-\varepsilon z)^{2p}}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Dowód

Jeżeli we wzorze (1.3) zamieniamy $\cos^2 Q(t)$ na $1 - \sin^2 Q(t)$, wtedy problem oszacowania z góry dla $\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c^2_{p-1})$ sprowadza się do wyznaczenia największej wartości prawej strony równości.

$$\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c^2_{p+1}) = \left(\alpha - \frac{p+1}{2p}\right)(b^2_{p+1} - a^2_{p+1}) + 4p\int_0^\infty e^{-2t}\sin^2 Q(t)dt - p = I' \quad (1.8)$$

Analogicznie jak w twierdzeniu 1 zachodzi następujący lemat.

Lemat 2

Jeżeli $\alpha > \frac{p+1}{2p}$, to w klasie S_p największa wartość $I' = \overline{I'(b_{p+1})}$ przy ustalonym b_{p+1} z przedziału $\langle -2p, 2p\rangle$ wyraża się parametrycznie równościami

$$\left.\begin{aligned} b_{p+1} &= 2p(1+s)e^{-s} \\ \overline{I'(b_{p+1})} &= \left(\alpha - \frac{p+1}{2p}\right) b^2_{p+1} + 2p(1+2s)e^{-2s} - p \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Równości te osiągnięte są tylko dla funkcji

$$e^{-t}\sin Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \le t \le s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases}$$

i przy tym $a_{p+1} = o$.

Dowód

Podobnie jak w dowodzie lematu 1 wystarczy rozpatrywać b_{p+1} według wzoru

$$b_{p+1} = 2p\int_0^\infty e^{-t}\sin Q(t)dt$$

w przedziale $\langle o, 2p\rangle$. Prawa strona (1.8) będzie więc największa gdy $a_{p+1} = o$ oraz gdy przy warunku $\int_0^\infty e^{-t}\sin Q(t)dt = \mathrm{const.}$ całka $\int_0^\infty e^{-2t}\sin^2 Q(t)dt$ będzie największa.

Zauważmy następnie, że największa wartość całki $\int_0^\infty e^{-2t}\sin^2 Q(t)dt$, z warunkiem $\int_0^\infty e^{-t}\sin Q(t)dt = \text{const.}$ będzie osiągnięta wówczas, gdy całka $\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2 Q(t)dt$ osiągnie przy warunku $\int_0^\infty e^{-t}\cos Q(t)dt = \text{const}$ swoją wartość najmniejszą, tj. dla funkcji

$$e^{-t}\sin Q(t) = \begin{cases} e^{-s}, & o \leqslant t \leqslant s \\ e^{-t}, & s < t < \infty \end{cases} \tag{1.10}$$

Jeżeli teraz obliczymy dla funkcji (1.10) b_{p+1} oraz prawą stronę (1.8) przy $a_{p+1} = o$, to otrzymamy równość (1.9). Zauważmy jeszcze, że równości (1.9) wynikają również z lematu 1 G.M. Gołuzina [1] s. 196-197.

Zatem z lematu 2 wynika, że dla $\alpha \geqslant \frac{p+1}{2p}$

$$\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}) \leqslant \max_{|b_{p+1}| \leqslant 2p} \Gamma(b_{p+1}) = \max_{o \leqslant s < \infty} \varphi(s), \tag{1.11}$$

gdzie

$$\varphi(s) = 2p\Big(\big(2p\alpha - (p+1)\big)s^2 + 2p(2\alpha - 1)s + p(2\alpha - 1)\Big)e^{-2s} - p$$

Ponieważ

$$\varphi'(s) = -8p^2\, s\, e^{-2s}\Big(\big(\alpha - \frac{p+1}{2p}\big)s + \alpha - \frac{p-1}{2p}\Big) < o$$

w całym przedziale $o < s < \infty$, więc $\max\limits_{o \leqslant s < \infty} \varphi(s) = \varphi(o)$, stąd i wobec (1.11) mamy

$$\mathrm{Re}(c_{p+2} - \alpha c_{p+1}) \leqslant p(4p\alpha - (2p+1)).$$

§ 2. MAKSIMUM I MINIMUM FUNKCJONAŁU $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1}z^{p+1} + c_{p+2}z^{p+2} + \ldots$$

należy do klasy S_p i $p \geqslant 2$, to

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \leqslant p(2p-1). \tag{2.1}$$

Znak równości realizują odpowiednio funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-\varepsilon z)^{2p}}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Jeżeli $p = 1$, to

$$|c_3| - |c_2| \leqslant (4s_1^2 + 4s_1 + 2)e^{-2s_1} - 2(1+s_1)e^{-s_1} + 1, \tag{2.2}$$

gdzie s_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania

$$s \cdot e^{-s} = \frac{1}{4}.$$

Dowód

Wyznaczymy najpierw największą wartość funkcjonału $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$ przy ustalonym $|c_{p+1}|$ z przedziału $\langle 0, 2p\rangle$ a następnie zmieniając $|c_{p+1}|$ w tym przedziale znajdziemy $\max\limits_{f \in S_p} (|c_{p+2}| - |c_{p+1}|)$.

Jeżeli więc $|c_{p+1}| = \text{const.}$, to wówczas zadanie sprowadza się do znalezienia największej wartości $|c_{p+2}| = \overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$ przy stałym $|c_{p+1}|$. Możemy więc korzystać z Twierdzenia 5 podanego w pracy [3], w myśl którego $\overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$ przy $|c_{p+1}| = \text{const.}$ wyraża się parametrycznie równościami

$$\begin{aligned} |c_{p+1}| &= 2p(1+s)e^{-s} \\ \overline{|c_{p+2}|} &= \frac{p+1}{2p}|c_{p+1}|^2 - 2p(1+2s)e^{-2s}, \qquad 0 \leqslant s < \infty, \end{aligned} \tag{2.3}$$

skąd

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \leqslant \overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|) - |c_{p+1}| \leqslant \max_{|c_{p+1}| \leqslant 2p} \left(\overline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|) - |c_{p+1}|\right),$$

a po wyrugowaniu $|c_{p+1}|$, otrzymujemy

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \leqslant \max_{0 \leqslant s < \infty} \varphi(s), \tag{2.4}$$

gdzie

$$\varphi(s) = \left(2p(p+1)s^2 + 4p^2 s + 2p^2\right)e^{-2s} - 2p(1+s)e^{-s} + p. \tag{2.5}$$

Nadto pochodna

$$\varphi'(s) = 2p\, a\, e^{-s}\left(-2(p+1)se^{-s} - 2(p-1)e^{-s} + 1\right),$$

której znak pokrywa się ze znakiem funkcji

$$V(s) = -2)p+1)s\, e^{-s} -2(p-1)e^{-s} + 1.$$

Jeżeli zatem

a) $p \geqslant q$ wówczas

$$V(o) = -2(p-1) + 1 < o, \quad V(\infty) = 1 \quad i \quad V'(s) = 2(p+1)e^{-s}(s - \frac{2}{p+1}), \tag{2.6}$$

przeto z ciągłości funkcji $V(s)$ wynika, że $V(s)$ zmienia raz swój znak z wartości ujemnej na dodatnią. Wobec tego

$$\max_{0 \leqslant s < \infty} \varphi(s) = \max(\varphi(o), \varphi(\infty)).$$

Ponieważ $\varphi(o) = p(2p-1) > p = \varphi(\infty)$, więc

$$\max_{0 \leqslant s < \infty} \varphi(s) = \varphi(o).$$

Stąd i wobec (2.4) otrzymujemy

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \leqslant p(2p - 1),$$

tj. nierówność (2.1) twierdzenia.

b) $p = 1$ wówczas

$$\varphi(s) = (4s^2 + 4s + 2)e^{-2s} - 2(1+s)e^{-s} + 1,$$

i

$$\varphi'(s) = 2\, s\, e^{-s}(-4s\, e^{-s} + 1)$$

więc $\max\limits_{0 \leqslant s < \infty} \varphi(s)$ jest osięgnięte dla s spełniających równanie

$$s\, e^{-s} = \frac{1}{4}.$$

Równanie to ma dwa pierwiastki dodatnie, gdyż lewa strona rośnie w przedziale (0,1) i dalej maleje. Ponieważ dla s bliskich zeru $\varphi'(s) > o$, to maksimum funkcji $\varphi(s)$ jest osięgnięte dla mniejszego pierwiastka.

Przypadek $p = 1$ został zbadany przez G.M. Gołuzina w jednej z wcześniejszych jego prac.

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \dots$$

należy do klasy s_p, to

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \geqslant - p \sqrt{\frac{2}{p+1}}.$$

Znak równości spełniaję odpowiednio funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{\left(1 - \varepsilon \sqrt{\frac{2}{p+1}}\, z + \varepsilon^2 z^2\right)^p}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Dowód

Ażeby znaleźć $\min\limits_{f \in S_p} (|c_{p+2}| - |c_{p+1}|)$, szukamy najpierw najmniejszej wartości $(|c_{p+2}| - |c_{p+1}|)$ przy ustalonym $|c_{p+1}|$ z przedziału $\langle o, 2p \rangle$, co jak łatwo zauważyć sprowadza się do wyznaczenia najmniejszej wartości $|c_{p+2}| = \underline{|c_{p+2}|}(|c_{p+1}|)$ przy $|c_{p+1}| = \text{const.}$ Zatem w myśl Tw. 6 $\underline{|c_{p+2}|}$ wyraża się w postaci

$$\underline{|c_{p+2}|} = \max \begin{cases} o \\ \frac{p+1}{2p} |c_{p+1}|^2 - p. \end{cases} \tag{2.8}$$

Rozpatrzmy następnie dwa przypadki:

a) $p \sqrt{\frac{2}{p+1}} \leqslant |c_{p+1}| \leqslant 2p$, wówczas wobec (2.8)

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \geqslant , \quad \underline{|c_{p+2}|} - |c_{p+1}| \geqslant \min_{\langle p\sqrt{\frac{2}{p+1}}, 2p\rangle} U(|c_{p+1}|), \tag{2.9}$$

gdzie

$$U(|c_{p+1}|) = \frac{p+1}{2p} |c_{p+1}|^2 - |c_{p+1}| - p.$$

Ponieważ $p \sqrt{\frac{2}{p+1}} > \frac{2p}{p+1}$ i $U(|c_{p+1}|)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $\langle p \sqrt{\frac{2}{p+1}}, 2p\rangle$, więc

$$\min_{\langle p\sqrt{\frac{2}{p+1}},\ 2p\rangle} U(|c_{p+1}|) = U\left(p\sqrt{\frac{2}{p+1}}\right) = -p\sqrt{\frac{2}{p+1}}.$$

Stąd i wobec (2.9) mamy

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \geq -p\sqrt{\frac{2}{p+1}}.$$

b) $0 \leqslant |c_{p+1}| < p\sqrt{\frac{2}{p+1}}$, to wobec (2.8) $|c_{p+2}| = 0$, skąd już wynika, że również

$$|c_{p+2}| - |c_{p+1}| \geq -p\sqrt{\frac{2}{p+1}}$$

Zauważmy nadto, że w obu przypadkach równość realizują odpowiednie funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{\left(1 - \varepsilon\sqrt{\frac{2}{p+1}}\,z + \varepsilon^2 z^2\right)^p} \qquad |\varepsilon| = 1.$$

LITERATURA

[1] Koseki K.: Über p-wertigen Funktionen. Math. Journal of Okayama University 60, 1-2. 1960/61.

[2] Pethe K.: Obszar współczynników początkowych funkcji p-listnych w kole jednostkowym.

ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛОВ $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$, $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$
P-ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Р е з ю м е

Исходя из соответственного уравнения Лёвнера для p-листных функций, с помощью вариационной леммы И.Е. Базилевича, получены точные оценки функционалов $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$, $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$.

ESTIMATION OF FUNCTIONALS $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$, $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$ OF P-VALENT FUNCTIONS IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

In this paper has been got a sharp estimation of functionals $|c_{p+2} - \alpha c_{p+1}^2|$, for every α and $|c_{p+2}| - |c_{p+1}|$ in the class of p-valent functions with the help of the Loewner method.