ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Karol PETHE

MAKSIMUM I MINIMUM FUNKCJONAŁU $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$ W KLASIE FUNKCJI P-LISTNYCH

Streszczenie. W niniejszej pracy, metodą Loewnera, otrzymano ostre oszacowanie funkcjonału $\mathrm{Re}(c_{p+2} + c_{p+1})$ określonego w klasie funkcji p-listnych w kole jednostkowym.

Niech S_p będzie klasą funkcji

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \dots \tag{1}$$

regularnych i p-listnych w kole $|z| < 1$.

K. Koseki w pracy [1] badał pewną klasę L funkcji p-listnych, zdefiniowaną następująco:

Funkcja $\hat{f}(z)$ należy do L, jeżeli $\hat{f}(z) = g(z,o)$, gdzie $g(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(z,t)}{\partial z}\, z\, \frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}, \qquad o \leqslant t \leqslant t_o < \infty$$

spełniających warunek $g(z,t_o) = z^p$, gdzie $k(t) = e^{i\theta(t)}$ i $\theta(t)$ jest funkcją rzeczywistą przedziałami ciągłą w $\langle o, t_o\rangle$ i wykazał, że klasa tych funkcji jest gęsta w klasie S_p.

Współczynniki c_{p+1} i c_{p+2} funkcji $f(z) = e^{pt_o}\hat{f}(z)$, gdzie $\hat{f}(z) \in L$ wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= -2p \int_0^\infty e^{-t}\, k(t)dt \\ c_{p+2} &= 2p(p+1)\left(\int_0^\infty e^{-t} k(t)dt\right)^2 - 2p \int_0^\infty e^{-2t}\, k^2(t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Ze wzorów (2) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} a_{p+1} &= -2p \int_0^\infty e^{-t} \cos Q(t)dt, \quad b_{p+1} = -2p \int_0^\infty e^{-t} \sin Q(t)dt \\ a_{p+2} &= \frac{p+1}{2p} (a_{p+1}^2 - b_{p+1}^2) - 2p \int_0^\infty e^{-2t} \cos 2Q(t)dt \\ b_{p+2} &= \frac{p+1}{p} a_{p+1} b_{p+1} - 2p \int_0^\infty e^{-2t} \sin 2Q(t)dt. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Będziemy stale zakładali, że $a_{p+1} \geqslant 0$ nie zawężając przez to problemu, ponieważ zawsze możemy tak uczynić, kładąc do wzorów (3) w miejsce Q, Q + π, nie zmieniając przy tym a_{p+2} i b_{p+2}.

§ 1. MAKSIMUM FUNKCJONAŁU $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \ldots$$

należy do klasy S_p i $\alpha > 0$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant p(2\alpha + 2p + 1). \quad (1.1)$$

Znak równości realizuje funkcja postaci

$$f(z) = \frac{z^p}{(1 - z)^{2p}}$$

Dowód

Mamy więc znaleźć

$$\max_{f \in S_p} (a_{p+2} + \alpha a_{p+1}). \quad (1.2)$$

W tym celu wyznaczymy najpierw największą wartość funkcjonału $a_{p+2} + \alpha a_{p+1}$ przy ustalonym a_{p+1} z przedziału $\langle 0, 2p \rangle$, a następnie zmieniając a_{p+1} w tym przedziale znajdziemy (1.2).

Jeżeli zatem $a_{p+1} = \text{const.}$, to $\max\limits_{f\in S_p}(a_{p+2} + \alpha a_{p+1}) = \max\limits_{f\in S_p} a_{p+2} + \alpha a_{p+1}$, oznacza to, że wystarczy nam najpierw znaleźć największą wartość $a_{p+2} = \overline{a_{p+2}}(a_{p+1})$, gdy $a_{p+1} = \text{const.}$ Możemy więc skorzystać z Tw. 1, podanego w pracy [2], w myśl którego $\overline{a_{p+2}}(a_{p+1})$ wyraża się parametrycznie w postaci

$$\left.\begin{aligned} &a_{p+1} = 2p(1+s)e^{-s} \\ &\overline{a_{p+2}}(a_{p+1}) = \frac{p+1}{2p}a_{p+1}^2 - 2p(1+2s)e^{-2s} + p, \quad s > 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

zatem

$$\left.\begin{aligned} &a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant \frac{p+1}{2p}a_{p+1}^2 - 2p(1+2s)e^{-2s} + p + \alpha a_{p+1} \\ &a_{p+1} = 2p(1+s)e^{-s}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

skąd po wyrugowaniu a_{p+1}, otrzymamy

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant \varphi(s), \tag{1.5}$$

gdzie

$$\varphi(s) = \left(2p(1+p)s^2 + 4p^2s + 2p^2\right)e^{-2s} + \alpha.2p(1+s)e^{-s} + p.$$

Zadanie nasze sprowadza się dalej do wyznaczenia $\max\limits_{0\leqslant s<\infty}\varphi(s)$. Ponieważ dla każdego $s > 0$

$$\varphi'(s) = -2p\, s\, e^{-s}\left(2(p+1)s\, e^{-s} + 2(p-1)e^{-s} + \alpha\right) < 0,$$

więc

$$\max_{0\leqslant s<\infty}\varphi(s) = \varphi(0) = p(2\alpha + 2p + 1),$$

stąd i wobec (1.5) wynika nierówność (1.1).

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1}.z^{p+1} + c_{p+2}z^{p+2} + \ldots$$

należy do klasy S_p, a ponadto

1° jeżeli $-2(p-1) \leqslant \alpha \leqslant 0$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant \max\begin{cases} p(2\alpha + 2p + 1) \\ p \end{cases} \tag{1.6}$$

przy czym równość realizują funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-z^2)^p}, \quad f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2p}}.$$

2^o jeżeli $-2(1+p)e^{\frac{-2}{1+p}} < \alpha < -2(p-1)$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant \left(2p(1+p)s_1^2 + 4p^2 s_1 + 2p^2\right) e^{-2s_1} + \alpha .2p(1+s_1)e^{-s_1} + p, \tag{1.7}$$

gdzie s_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania

$$2(1+p)s\, e^{-s} + 2(p-1)e^{-s} + \alpha = 0$$

3^o jeżeli $\alpha \leqslant -2(p+1)e^{-\frac{2}{p+1}}$ to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant p \tag{1.8}$$

z równością dla funkcji

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-z^2)^p}.$$

Dowód

Postępując analogicznie jak w twierdzeniu 1, otrzymamy w myśl (1.5) nierówność

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant \varphi(s),$$

gdzie

$$\varphi(s) = (2p(1+p)s^2 + 4p^2 s + 2p^2)e^{-2s} + \alpha 2p(1+s)e^{-s} + p. \tag{1.9}$$

Więc również należy znaleźć $\max\limits_{0 \leqslant s < \infty} \varphi(s)$. Zauważmy następnie, że znak pochodnej

$$\varphi'(s) \doteq 2p\, s\, e^{-s}(-2(1+p)s\, e^{-s} + 2(1-p)e^{-s} - \alpha)$$

pokrywa się ze znakiem funkcji

$$V(s) = -2(1+p)s\, e^{-s} + 2(1-p)e^{-s} - \alpha.$$

Pochodna $V'(s) = 2(1+p)e^{-s}\left(s - \frac{2}{1+p}\right)$, więc funkcja $V(s)$ posiada w $s = \frac{2}{1+p}$ minimum, zatem znak funkcji $V(s)$ a więc i $\varphi'(s)$ zależy od wartości granicznych $V(o) = -2(p-1) - \alpha$, $V(\infty) = -\alpha$, i od wartości wyrażenia (1.10)

$$V\left(\frac{2}{1+p}\right) = -2(1+p)e^{-\frac{2}{1+p}} - \alpha . \tag{1.10}$$

Rozpatrzmy teraz kolejno przypadki 1^o, 2^o i 3^o twierdzenia

1^o $-2(p-1) \leqslant \alpha < o$.

Ponieważ $V(o) > V\left(\frac{2}{1+p}\right)$ oraz wobec (1.10) $V(o) \leqslant o$ i $V(\infty) > o$, więc z ciągłości funkcji $V(s)$ wynika, że funkcja $V(s)$ a zatem i $\varphi'(s)$ zmieniają w przedziale $o < s < \infty$ tylko raz swój znak z wartości ujemnej na dodatnią, wobec tego

$$\max_{o \leqslant s < \infty} \varphi(s) = \max(\varphi(o), \varphi(\infty)) = \max \begin{cases} p(2+2p+1) \\ p \end{cases} .$$

skąd już wynika nierówność (1.6) twierdzenia.

2^o Jeżeli $-2(p+1)e^{-\frac{2}{1+p}} < \alpha < -2(p-1)$ wówczas z (1.10) wynika, że $V(o) > o$, $V(\infty) > o$ i $V\left(\frac{2}{1+p}\right) < o$, zatem z ciągłości $V(s)$ wynika że równanie

$$-2(1+p)s\, e^{-s} + 2(1-p)e^{-s} - \alpha = o$$

ma dwa dodatnie pierwiastki $s_1 < s_2$.

Ponieważ dla dostatecznie małych $s > o$, $\varphi'(s) > o$, więc funkcja $\varphi(s)$ osiąga swoje maksimum dla mniejszego pierwiastka. Stąd i wobec (1.9) otrzymamy nierówność

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \leqslant (2p(1+p)s_1^2 + 4p^2 s_1 + 2p^2)e^{-2s_1} + \alpha\, 2p(1+s_1)e^{-s_1} + p.$$

Pozostało jeszcze wykazać, że oszacowanie (1.7) jest oszacowaniem ostrym. W tym celu konstruujemy funkcję

$$k(t) = \begin{cases} e^{t-s_1} + i\sqrt{1 - e^{2(t-s_1)}}, & o \leqslant t \leqslant \beta \\ e^{t-s_1} - i\sqrt{1 - e^{2(1-s_1)}}, & \beta < t \leqslant s_1 \\ 1, & t > s_1 \end{cases} \tag{1.11}$$

gdzie β jest pierwiastkiem równania

$$\int_0^{\beta} e^{-t}\sqrt{1-e^{-2(s_1-t)}}\,dt - \int_{\beta}^{s_1} e^{-t}\sqrt{1-e^{-2(s_1-t)}}\,dt = o.$$

Przy tak dobranym β obliczając a_{p+1} i a_{p+2} dla $k(t)$, otrzymamy

$$a_{p+1} = 2p(1+s_1)e^{-s_1}$$

$$a_{p+2} = (2p1+p)s_1^2 + 4p^2 s_1 + 2p^2)e^{-2s_1} + p,$$

więc istnieje funkcja $f(z) \in S_p$ przyporządkowana funkcji (1.11), która jest funkcją ekstremalną dla (1.7).

3^o Jeżeli $\alpha \leqslant -2(1+p)e^{-\frac{2}{1+p}}$, to wtedy z (1.10) wynika, że $V(o) > o$, $V(\infty) > o$ i $V(\frac{2}{1+p}) \geqslant o$, zatem w całym przedziale $o < s < \infty V(s) \geqslant o$, a więc funkcja $\varphi(s)$ jest w tym przedziale funkcją rosnącą, przeto największą swoją wartość osiąga dla $s = \infty$.
Stąd i wobec (1.9) otrzymujemy nierówność (1.8) twierdzenia.

§ 2. MINIMUM FUNKCJONAŁU $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \dots$$

należy do klasy S_p i $\alpha \geqslant o$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geqslant -p. \tag{2.1}$$

Funkcja ekstremalna jest funkcją postaci

$$f(z) = \frac{z^p}{(1+z^2)^p}.$$

Jeżeli $-2(1+p) \leqslant \alpha < o$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geqslant -\frac{1}{2}\frac{p}{1+p}\alpha^2 - p. \tag{2.2}$$

Równość realizuje funkcja

$$f(z) = \frac{z^p}{\left(1 + \frac{\alpha}{1+p} z + z^2\right)^p}.$$

Jeżeli $\alpha < -2(1+p)$, to

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geqslant p(2\alpha + 2p + 1),$$

przy czym równość zachodzi dla funkcji

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2p}}.$$

Dowód

Ponieważ zadanie sprowadza się do znalezienia $\min\limits_{f \in S_p}(a_{p+2} + \alpha a_{p+1})$, więc podobnie jak w twierdzeniu 1 ustalając a_{p+1} z przedziału $\langle o, 2p\rangle$, znalezienie $\min\limits_{f \in S_p}(a_{p+2} + a_{p+1})$ sprowadza się jak łatwo zauważyć do wyznaczenia najmniejszej wartości

$$a_{p+2} = \underline{a_{p+2}}(a_{p+1}) \quad \text{przy} \quad a_{p+1} = \text{const}.$$

Zatem w myśl twierdzenia 2 podanego w pracy [2] otrzymamy dla $a_{p+2}(a_{p+1})$ równanie

$$\underline{a_{p+2}} = \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 - p,$$

a stąd otrzymujemy

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geqslant U(a_{p+1}), \tag{2.4}$$

gdzie

$$U(a_{p+1}) = \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 + \alpha a_{p+1} - p. \tag{2.5}$$

Rozpatrzmy teraz kolejno:

a. Jeżeli $\alpha \geqslant o$, wówczas funkcja (2.5) przyjmuje w przedziale $\langle o, 2p\rangle$ swoją najmniejszą wartość dla $a_{p+1} = o$, skąd już wynika nierówność (2.1) twierdzenia.

b. Jeżeli $-2(1+p) < \alpha < o$, to wówczas $-\frac{p}{p+1}\alpha < 2p$, więc funkcja (2.5) w $\langle o, 2p\rangle$, jako funkcja kwadratowa przyjmuje swoją najmniejszą wartość gdy $a_{p+1} = -\frac{p}{p+1}\alpha$. Stąd i wobec (2.4) otrzymujemy nierówność

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geq -\frac{1}{2}\frac{p}{p+1}\alpha^2 - p.$$

c. Jeżeli $\alpha \leq -2(1+p)$, wtedy $-\frac{p}{p+1}\alpha \geq 2p$, a ponieważ $0 \leq a_{p+1} \leq 2p$ więc $U(a_{p+1})$ jest funkcją malejącą, przeto swoją najmniejszą wartość osięga gdy $a_{p+1} = 2p$. Skąd już wynika, że

$$a_{p+2} + \alpha a_{p+1} \geq p(2\alpha + 2p + 1),$$

tj. nierówność (2.3) twierdzenia.

Funkcjami ekstremalnymi dla a. b. i c., co łatwo sprawdzić, są odpowiednio funkcje

$$f(z) = \frac{z^p}{(1+z^2)^p}, \quad f(z) = \frac{z^p}{\left(1 + \frac{\alpha}{1+p} z + z^2\right)^p}, \quad f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2p}}.$$

LITERATURA

[1] Koseki K.: Über p-wertigen Funktionen Math. Journal of Okayama University. 60, 1-2. 1960/61.

[2] Pethe K.: Obszar współczynników początkowych funkcji p-listnych w kole jednostkowym.

МАКСИМАЛЬНЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$ В КЛАССЕ P-ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

Исходя из уравнения Лёвнера для р-листных функций получено точные оценки для функционала $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$.

MAKSIMUM AND MINIMUM OF FUNCTIONAL $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$ IN THE CLASS OF P-VALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper has been got a sharp estimation of $\mathrm{Re}(c_{p+2} + \alpha c_{p+1})$ for every real in the class of p-valent functions with the help of the Loewner method.