ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Elżbieta RUPNIEWSKA

O PRZEKSZTAŁCENIACH PUNKTOWO-ZBIOROWYCH MIERZALNYCH

Streszczenie. W pracy dowodzi się pewnej własności ciągu przekształceń punktowo-zbiorowych mierzalnych $F_k:T \to 2^{R^n}$, przy założeniu domkniętości zbiorów-obrazów przekształceń F_K. Własność ta jest dowiedziona w [1] przy założeniu, że zbiory-obrazy przekształceń $F_k:T \to 2^E$ są zwarte i niepuste, E jest przestrzenią Banacha. Bezpośrednią konsekwencją tej własności jest uzyskane w [1] twierdzenie, będące odpowiednikiem twierdzenia Lebesgue'a dla całek przekształceń punktowo-zbiorowych. Z rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy wynika, że twierdzenie to dla przekształceń $F_k:T \to 2^{R^n}$ pozostaje prawdziwe przy założeniu tylko domkniętości zbiorów-obrazów tych przekształceń.

Niech (T, B_T, μ) oznacza przestrzeń ze skończoną miarą dodatnią, F - przekształcenie punktowo-zbiorowe $F:T \to 2^{R^n}$. W literaturze spotykamy dwie różne definicje mierzalności przekształcenia F:

D e f i n i c j a 1. Przekształcenie F nazywamy mierzalnym, jeśli istnieje przeliczalna rodzina przekształceń punktowo-punktowych $x_k:T \to R^n$, $k=1,2,\ldots$ taka, że dla każdego k zbiór $\{t \in T: x_k(t) \in F(t)\}$ jest mierzalny i ponadto dla prawie wszystkich $t \in T$:

$$F(t) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k(t)\} \cap F(t)}.$$

D e f i n i c j a 2. Przekształcenie F nazywamy mierzalnym, jeśli dla każdego zbioru A domkniętego w R^n zbiór $F^-(A) = \{t \in T: F(t) \cap A \neq \emptyset\}$ jest mierzalny.

Można wykazać, że dla przekształceń o zbiorach-obrazach domkniętych w R^n powyższe definicje są równoważne. Bezpośrednio z definicji 1 wynika że jeśli przekształcenie F jest mierzalne, to zbiór efektywny tego przekształcenia, $\mathrm{dom}\, F = \{t \in T: (F(t) \neq \emptyset\}$, jest zbiorem mierzalnym. Przekształcenie mierzalne o domkniętych zbiorach-obrazach nazywamy normalnym.

L e m a t 1 Aby przekształcenie F było mierzalne konieczne jest, a w wypadku gdy zbiory-obrazy przekształcenia F są domknięte to i wystarczające, aby dla każdego $x \in R^n$ funkcja skalarna $d:T \to R: d(x,F(t)) = \inf\{\varrho(x,z),\ z \in F(t)\}$ była mierzalna.

Lemat 2

Jeżeli:

1) funkcja $g:T\times R^n \to R$ spełnia warunki:

a) dla każdego $t\in T$ funkcja $x\to g(t,x)$ jest ciągła,

b) dla każdego $x\in R^n$ funkcja $t\to g(t,x)$ jest mierzalna.

2) przekształcenie $F:T\to 2^{R^n}$ jest normalne,

3) funkcja $h:T\to R$ jest mierzalna,

to przekształcenie punktowo-zbiorowe:

$$t\to \phi(t) = \left\{x\in R^n : x\in F(t) \quad \text{i} \quad g(t,x) = h(t)\right\}$$

jest normalne.

Dowody lematów znajdują się w [2].

Twierdzenie

Niech $F_k:T\to 2^{R^n}$ będzie ciągiem przekształceń normalnych, o niepustych zbiorach-obrazach. Załóżmy, że istnieje μ-całkowalna funkcja rzeczywista g taka, że dla każdego $u\in F_k(t)$, dla każdego $t\in T$ i dla dowolnego $k=1,2,\ldots$: $|u|\leqslant g(t)$.

Niech $f:T\to R^n$ będzie przekształceniem mierzalnym takim, że dla dowolnego $t\in T$:

$$f(t)\in \mathrm{Li}\, F_k(t) = \left\{y\in R^n : \forall K(y,r)\, \exists N\, \forall k > N\ K(y,r)\cap F_k(t) \neq \emptyset\right\}$$

Wtedy istnieje ciąg przekształceń μ-całkowalnych $f_k:T\to R^n$ taki, że dla dowolnego $t\in T$ i $k=1,2,\ldots$ $f_k(t)\in F_k(t)$, oraz dla każdego

$$t\in T: \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t).$$

Dowód

Dla dowolnego $t\in T$ jest $f(t)\in \mathrm{Li}\, F_k(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{k\to\infty} d(f(t), F_k(t)) = 0$. Łatwo zauważyć, wykorzystując lemat 1, że funkcja $t\to d(f(t), F_k(t))$ jest mierzalna. Utwórzmy ciąg przekształceń $G_k:T\to 2^{R^n}$

$$G_k(t) = \left\{y\in F_k(t) : \varphi(f(t),y) = d(f(t), F_k(t))\right\},$$

i do każdego z nich zastosujmy lemat 2 kładąc:

$$g(t,y) = \varphi(f(t),y), \quad F = F_k, \quad h(t) = d(f(t), F_k(t)).$$

Założenia lematu 2 są wtedy spełnione, stąd wynika mierzalność każdego z przekształceń G_k, $k=1,2,\ldots$

Wobec powyższego, dla każdego przekształcenia G_k istnieje mierzalny selektor f_k taki, że dla dowolnego $t \in T$:

$$\varrho(f(t), f_k(t)) = d(f(t), F_k(t)).$$

Jest oczywiste, że każdy z selektrów f_k, $k=1,2,\dots$ jest μ-całkowalny, ponieważ dla dowolnego $t \in T: |f_k(t)| \leqslant g(t)$. Ponadto $\lim\limits_{k \to \infty} \varrho(f(t), f_k(t)) = \lim\limits_{k \to \infty} d(f(t), F_k(t)) = 0$ dla każdego $t \in T$, co dowodzi twierdzenia.

Powyższe twierdzenie dowiedziono w [1] przy założeniu, że zbiory-obrazy przekształceń F_k są zwarte i niepuste. Wykazaliśmy, że dla przekształceń $F_k: T \to 2^{R^n}$ można żądać tylko domkniętości ich zbiorów-obrazów. Warunek, że zbiory-obrazy przekształceń F_k są niepuste można odrzucić, zakładając tylko, że $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{dom} F_k(t) = B \neq \emptyset$ i w charakterze zbioru T występującego w twierdzeniu postawić zbiór B.

Korzystając z udowodnionego twierdzenia, można w prosty sposób wykazać, że $\int\limits_T \mathrm{Li}\, F_k(t) d\mu \subset \mathrm{Li} \int\limits_T F_k(t) d\mu$, jeśli tylko $F_k: T \to 2^{R^n}$ są przekształceniami normalnymi. Dowód tego faktu jest analogiczny do dowodu przedstawionego w [1] dla F_k o zwartych i niepustych zbiorach-obrazach.

LITERATURA

[1] Castaing Ch.: Sur les multi-applications mesurables; Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle 1 (1967).

[2] Иоффе, Тихомиров: Теория экстремальных задач. Изд. "Наука".

ОБ ИЗМЕРИМЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе доказывается некоторое свойство последовательности измеримых многозначных отображений из T в R^n в предложении, что они замкнутообразные. Это свойство доказано в [1] в случае отображений обладающих компактными и непустыми значениями в Банаховом пространстве. Непосредственно из этого свойства вытекает доказанная в [1] теорема о интегральных многозначных отображений, похожая на класическую теорему Лебега. Из рассмотрений приведенных в этой работе вытекает, что теорема Лебега для многозначных отображений остается верной лишь с предложением, что множества-значения этих отображений замкнуты в пространстве R^n.

SUR LES MULTI-APPLICATIONS MESURABLES

R e s u m é

Ici nous demontrons d'une propriété de suite de multi-applications mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des fermés d'espace R^n. Cette propriété est achevée dans [1] pour une suite de multi-applications mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace de Banach. La conséquence directe de cette propriété est la théorème étant equivalent à la théorème de Lebesgue pour intégrales de multi-applications Ce théorème est demontré dans [1]. D'après de considérations de ce travail s'ensuit que le théorème de Lebegue pour intégrales de multi-applications reste véritable seulement avec la supposition que multi-applications ont valeurs dans l'ensemble des fermés d'espace R^n.