ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Andrzej PACZUŁA

ANALOGON TRANSFORMACJI FOURIERA W PRZESTRZENI $L_1(-\infty, \infty, B)$

Streszczenie. W pracy omawiana jest przestrzeń $L_1(-\infty, \infty, B)$ nad ciałem liczb zespolonych; jest to przestrzeń Banacha operatorów działających z przestrzeni liczb rzeczywistych w dowolną przestrzeń Banacha B, których norma w B jest całkowalna w sensie Lebesgue'a w granicach $(-\infty, \infty)$. Udowodnione jest twierdzenie uzasadniające wprowadzenie w $L_1(-\infty, \infty, B)$ analogonu transformacji Fouriera, a następnie - podane podstawowe jej własności z dowodami.

1. PRZESTRZEŃ $L_1(-\infty, \infty, B)$

Niech B będzie dowolną przestrzenią Banacha nad ciałem liczb zespolonych, z normą $\|\cdot\|_B$. Niech $f: R \to B$ będzie operatorem, przekształcającym przestrzeń liczb rzeczywistych w przestrzeni B. Wówczas

$$L_1(-\infty, \infty, B) = \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_B \, dt < \infty ; \; t \in R, \; f(t) \in B \right\}$$

jest zbiorem wszystkich operatorów f z całkowalną (w sensie Lebesgue'a) normą w przestrzeni B. Jak łatwo sprawdzić, zbiór $L_1(-\infty, \infty, B)$ z działaniami przeniesionymi z przestrzeni B stanowi przestrzeń liniową operatorów f nad ciałem liczb zespolonych. W tej pracy oznaczymy ją krótko przez L_1.

Trzeba nadmienić, że nie rozróżniamy operatorów f równych prawie wszędzie w R (tzn. za elementy L_1 uważamy w rzeczywistości klasy abstrakcji operatorów o jednakowej całce $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_B \, dt$). Możemy więc w L_1 wprowadzić normę:

$$\|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_B \, dt$$

i metrykę:

$$\varrho_{L_1}(f,g) = \|f - g\|_{L_1},$$

gdzie $f, g \in L_1$ $L_1(-\infty, \infty, B)$ jest przestrzenią zupełną, a więc - przestrzenią Banacha.

Własności liniowości przestrzeni B i normy w B są wystarczające dla wprowadzenia w B pojęć ciągłości, pochodnej i całki oznaczonej w sensie

Lebesgue'a, dla operatorów $f(t)$ ($t \in R$, $f(t) \in B$). Wszystkie podstawowe własności pochodnej i całki funkcji liczbowych pozostają prawdziwe dla różniczkowania i całkowania w B, w szczególności, pochodna iloczynu i całkowanie przez części - dla iloczynów operatorów $f(t)$ przez funkcje zespolone.

2. ANALOGON TRANSFORMACJI FOURIERA W PRZESTRZENI $L_1(-\infty, \infty, B)$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie

Niech

a) $f \in L_1$,

b) $\forall x \in R\ \exists \delta \in R,\ \delta > 0 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{t}\|f(x+t) - f(x)\|_B\, dt < \infty$;

wtedy

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)dt. \tag{1}$$

Dowód

Niech

$$I(A,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)dt. \tag{2}$$

$I(A,x)$ jest elementem B dla dowolnych ustalonych $A, x \in R$. Celem dowodu jest pokazanie, że $\forall x \in R\ \exists \lim_{B\, A\to\infty} I(A,x) = f(x)$.

Całka po zmiennej t w prawej części (2) jest zbieżna dla każdego $x \in R$, bowiem z założenia a) $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_B\, dt < \infty$. W związku z tym warunkiem, zbieżna jest bezwzględnie odpowiednia do prawej części (2) całka podwójna i możemy w (2) zmienić kolejność całkowania:

$$I(A,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ut \int_0^{A} f(t)\cos\lambda(t - x)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_0^{A} \cos\lambda(t - x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(t - x)}{t - x}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x + z)\frac{\sin Az}{z}\, dz,$$

gdzie $z = t - x$.

Z drugiej strony, $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin Az}{z}\,dz$, co wynika z równości $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Az}{z}\,dz = \pi$. Mamy więc

$$I(A,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x+z) - f(x)\right]\frac{\sin Az}{z}\,dz,$$

a zatem

$$\|I(A,x) - f(x)\|_B = \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x+z) - f(x)\right]\frac{\sin Az}{z}\,dz\right\|_B < I_1 + I_2 + I_3$$

gdzie

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\left\|\int_{-N}^{N} \left[f(x+z) - f(x)\right]\frac{\sin Az}{z}\,dz\right\|_B,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left\|\int_{|z| \geqslant N} f(x+z)\,\frac{\sin Az}{z}\,dz\right\|_B,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\|f(x)\|_B \left|\int_{|z| \geqslant N} \frac{\sin Az}{z}\,dz\right|.$$

Zachodzi następujący

Lemat

Jeśli $\varphi \in L_1$, to $\lim\limits_{p \to \infty} {}_B \int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = 0$ – dla dowolnych $a, b \in R$.

Dowód

Niech najpierw operator φ posiada ciągłą pochodną. Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin px\,dx = -\varphi(x)\,\frac{\cos px}{p}\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\,\frac{\cos px}{p}\,dx$$

oraz

$$\left\|\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx\right\|_B \leqslant \left\|\varphi(x)\,\frac{\cos px}{p}\right\|_B\Big|_a^b + \left\|\int_a^b \varphi'(x)\,\frac{\cos px}{p}\,dx\right\|_B \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|p|}\|\varphi(x)\|_B\Big|_a^b + \frac{1}{|p|}\left\|\int_a^b \varphi'(x)\cos px\,dx\right\|_B = I + II.$$

Wynika stąd, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists p_1\ \forall p > p_1\ \ I < \frac{\varepsilon}{4} \wedge II < \frac{\varepsilon}{4}$, więc

$$\left\| \int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx \right\|_B < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Niech teraz φ jest dowolnym operatorem z L_1. Ponieważ zbiór operatorów z ciągłą pochodną jest w L_1 wszędzie gęsty, więc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in L_1 \ \ \varrho_{L_1}(\varphi, \varphi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \| \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x) \|_B \, dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

gdzie φ_ε posiada ciągłą pochodną. A zatem, dla $p > p_1$ mamy

$$\left\| \int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx \right\|_B \leqslant \left\| \int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px\, dx \right\|_B +$$

$$+ \left\| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx \right\|_B \leqslant \int_a^b \| \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x) \|_B |\sin px|\, dx +$$

$$+ \left\| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx \right\|_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ;$$

Ostatnia nierówność wynika z (3) i (4) i kończy ona dowód lematu.

Powróćmy teraz do nierówności $\| \bar{I}(A,x) - f(x) \|_B < I_1 + I_2 + I_3$; ustalamy z. $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists A_1\ \forall A > A_1$ mamy $I_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, ponieważ operator $\frac{1}{z}[f(x+z) - f(x)] \in L_1$ z założenia b) i możemy zastosować lemat; $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, ponieważ z założenia a) $f \in L_1$; $I_3 < \frac{\varepsilon}{3}$, ponieważ całka $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Az}{z}\, dz = \pi$ (jest zbieżna). Udowodniliśmy przy ustalonym x, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_1\ \forall A > A_1 \| I(A,x) - f(x) \|_B < \varepsilon$, a więc $\forall x \in R\ \exists \lim_{A \to \infty} {}_B\, I(A,x) = f(x)$. Oznacza to prawdziwość tezy twierdzenia.

3. WNIOSKI

Ponieważ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d(-\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\lambda)(t - x)\, dt = f(x).$$

więc tezę twierdzenia możemy przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)dt. \tag{5}$$

Weźmy pod uwagę całkę

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t - x)dt. \tag{6}$$

W (6) całka po zmiennej t istnieje $(f \in L_1)$ i jest operatorem "nieparzystym" względem λ (tzn.: φ jest nieparzysty względem λ, jeśli $\varphi(\lambda,x) = -\varphi(-\lambda,x)$, a więc (6) = 0. Wynika stąd

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t - x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos\lambda(t - x) - i\sin\lambda(t - x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}\, dt.$$

Tak zapisaną tezę możemy rozbić na dwie równości:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}dt \quad \text{i} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Pierwsza z nich definiuje operator g, który będziemy nazywali transformacją Fouriera operatora $f \in L_1 : g \equiv F[f]$. Definicja operatora g jest poprawna dla każdego $f \in L_1$, natomiast twierdzenie zawarte w równości drugiej - o odwrotnej transformacji Fouriera - nie jest dla dowolnych $f \in L_1$ prawdziwe bez nałożenia na f dodatkowych warunków (jak np. założenie b) udowodnionego twierdzenia), bowiem g niekoniecznie jest operatorem z L_1.

4. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI TRANSFORMACJI FOURIERA W L_1

1. Jeśli ciąg operatorów $\{f_n\}$ z L_1 jest zbieżny w metryce L_1, to ciąg $\{g_n\}$ ich transformacji Fouriera ($\forall n \in N \; g_n = F[f_n]$) jest zbieżny jednostajnie w przestrzeni B:

$$\|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)\|_B = \left\|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\|_B =$$

$$= \left\|\int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x) - f_m(x)]\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\|_B \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\|_B\, dx =$$

$$= \|f_n - f_m\|_{L_1}.$$

2. Jeśli $f \in L_1$, to $g = F[f]$ jest operatorem a) ograniczonym; b) ciągłym i dążącym do zera przy $|\lambda| \to \infty$ w metryce B.

Teza a) wynika z nierówności

$$\|g(\lambda)\|_B = \left\|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\|_B \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_B\, dx.$$

Dowód tezy b) przedstawimy skrótowo. Nazwijmy operatorem schodkowym operator, przyjmujący na każdym odcinku podziału osi rzeczywistej wartość równą ustalonemu elementowi przestrzeni B. Niech najpierw f będzie operatorem stałym na $\langle a,b\rangle$, i równym zeru zewnątrz tego przedziału:

$$f(t) = \begin{cases} h \in B, & t \in \langle a,b\rangle; \\ 0 \in B, & t \in (-\infty, a) \cup (b, \infty). \end{cases}$$

Wówczas

$$F[f] = g(\lambda) = \int_a^b h\, e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}\, h.$$

Widać, że $F[f](\lambda)$ jest operatorem ciągłym i $\lim_{|\lambda| \to \infty}{}_B = 0$.

Operacja F jest liniowa, więc z powyższego wynika, że transformacja Fouriera operatora schodkowego także jest operatorem ciągłym i dążącym do zera ($|\lambda| \to \infty$). Ponieważ zaś zbiór operatorów schodkowych jest wszędzie gęsty w L_1, więc $\forall f \in L_1 \; \exists \{f_n\} \; \lim_{n \to \infty}^{L_1} f_n = f$, gdzie $\{f_n\}$ jest ciągiem operatorów schodkowych zbieżnym do f w metryce L_1; $n \in N$.

Z własności 1) wnioskujemy, że ciąg $\{g_n\}$ transformacji Fouriera operatorów $f_n (\forall n \in N\ g_n = F[f_n])$ jest zbieżny jednostajnie w B do operatora $g = F[f]$. Ponieważ wszystkie g_n są ciągłe i dążą do zera $(|\lambda| \to \infty)$ oraz ma miejsce zbieżność jednostajna, więc operator $g = F[f]$ także jest ciągły i dąży do zera przy $|\lambda| \to \infty$.

3. Jeśli operator $f \in L_1$ jest jednostajnie ciągły w B na dowolnym przedziale skończonym oraz $f' \in L_1$, to $F[f'] = i\lambda F[f]$.

Zauważmy, że

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

Ponieważ $f' \in L_1$, więc istnieje granica $\lim_{B,\ x \to -\infty} \int_0^x f'(t) = -f(0)$. A zatem

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f].$$

4. Im więcej pochodnych w L_1 ma operator $f \in L_1$, tym szybciej maleje w nieskończoności jego transformacja Fouriera: niech $f, f', \dots, f^{(k)} \in L_1$. Wówczas z wniosku 3 mamy

$$F\left[f^{(k)}\right] = (i\lambda)^k F[f], \quad \text{skąd} \quad F[f] = \frac{F\left[f^{(k)}\right]}{(i\lambda)^k}.$$

Wynika stąd, że $F[f]$ maleje przy $|\lambda| \to \infty$ szybciej, niż $\frac{1}{|\lambda|^k}$.

5. Jeśli $f \in L_1$ i istnieje $f' \in L_1$, to $F[f] \in L_1$. Wynika to wprost z wniosku 4.

6. Im szybciej maleje $f \in L_1$, tym większy jest stopień gładkości $F[f]$: niech $f,\ xf \in L_1$. Wówczas $g = F[f]$ jest operatorem różniczkowalnym i $g'(\lambda) = F[-i\, x\, f](\lambda)$. Rozpatrzmy bowiem transformację

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Różniczkujemy tę równość obustronnie po zmiennej λ, sposobem formalnym:

$$g'(\lambda) = -i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Ponieważ $xf \in L_1$, więc całka w prawej części istnieje i jest zbieżna jednostajnie po λ.

Rzeczywiście więc

$$g' = F\left[-ixf\right].$$

Ogólniej, jeśli $f, xf, \ldots, x^p f \in L_1$, to

$$g^{(k)} = F\left[(-ix)^k f\right]; \quad k=0,1,\ldots,p.$$

7. Niech $f \in L_1$ jest operatorem posiadającym pochodne wszystkich rzędów i niech

$$\|x^p f^{(q)}(x)\|_B < C_{p,q}; \quad p,q = 0,1,2,\ldots, \text{ a } C_{p,q}$$

są stałymi. Nazwiemy klasą $S_{\infty,B}$ operatorów szybko malejących rodzinę wszystkich takich operatorów f.

Tezą wniosku 7 jest, że transformacja Fouriera przekształca klasę $S_{\infty,B}$ na siebie: $F[S_{\infty,B}] = S_{\infty,B}$.

a). Udowodnimy, że $f \in S_{\infty,B} \Rightarrow F[f] = g \in S_{\infty,B}$. Dla dowolnych p i q ($p,q = 0,1,\ldots$) operator $x^p f^{(q)} \in L_1$, ponieważ

$$\|x^p f^{(q)}\|_B < \frac{C_{p+2,q}}{x^2}.$$

Z tego oraz z wniosku 6 wynika, że $g = F[f]$ ma pochodne wszystkich rzędów. Z wniosku 4 wynika, że $g = F[f]$ maleje w nieskończoności szybciej, niż $\frac{1}{|\lambda|^q}$. Wynika z tego, że każdy z operatorów

$$(i\lambda)^q g^{(p)} = (-i)^q F\left[(x^p f)^{(q)}\right]$$

ma normę w B ograniczoną stałą $D_{p,q}$, ponieważ jest ona transformacją Fouriera operatora z L_1. W ten sposób udowodniliśmy, że $F[f] = g \in S_{\infty,B}$.

b. Udowodnimy, że $g \in S_{\infty,B} \Rightarrow f \in S_{\infty,B}$. Weźmy transformację Fouriera operatora g: $f^* = F[g]$:

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

W myśl a. $f^* \in S_{\infty,B}$. Operator $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$ oczywiście także jest elementem $S_{\infty,B}$. Ale

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx,$$

więc wprowadzony operator f(x) jest odwrotną transformacją Fouriera operatora $g(\lambda)$: $g = F[f]$. Pokazaliśmy wyżej, że $f \in S_{\infty,B}$, co kończy dowód:

$$F\left[S_{\infty,B}\right] = S_{\infty,B}.$$

LITERATURA

[1] Kołmogorow A.N., Fomin S.W.: Elementy teorii funkcji i funkcjonalnogo analiza. Nauka, Moskwa 1972.

[2] Schwartz L.: Analiz. "Mir", Moskwa 1972.

АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_1(-\infty, \infty, B)$

Р е з ю м е

В работе рассматривается пространство $L_1(-\infty, \infty, B)$ над полем комплексных чисел; оно - банахово пространство операторов, действующих из пространства вещественных чисел в произвольное банахово пространство B, нормы которых в B интегрируемы по Лебегу в пределах $(-\infty, \infty)$. Доказывается теорема, оправдывающая введение в $L_1(-\infty, \infty, B)$ аналога преобразования Фурье, а затем, приводятся основные его свойства с доказательствами.

L'ANALOGUE DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS L'ESPACE $L_1(-\infty, \infty, B)$

R e s u m é

Dans ce travail on considère l'espace $L_1(-\infty, \infty, B)$ sur le corps des nombres complexes; c'est un espace de Banach des opérateurs de l'espace des nombres réels à un espace quelconque B de Banach, les normes desquels dans le B sont intégrables au sens de Lebesgue dans les limites $(-\infty, \infty)$. On démontre le théorème, qui justifie l'application dans $L_1(-\infty, \infty, B)$ de l'analoque de la transformation de Fourier, et ensuite on présente ses proprietes fondamental suivies des preuves.