ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Andrzej PACZUŁA

# ANALOGON UOGÓLNIONEJ TRANSFORMACJI FOURIERA W PRZESTRZENI $L_2(-\infty, \infty, H)$

Streszczenie. W pracy omawiana jest przestrzeń $L_1(-\infty, \infty, H)$ oraz przestrzeń $L_2(-\infty, \infty, H)$ nad ciałem liczb zespolonych; są to przestrzenie Hilberta operatorów działających z przestrzeni liczb rzeczywistych w dowolną przestrzeń Hilberta $H$, których normy (odpowiednio w $L_2$ - kwadraty norm) w $H$ są całkowalne w sensie Lebesgue'a w granicach $(-\infty, \infty)$. Udowodnione jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia Plancherela (1910), uzasadniające wprowadzenie w $L_2(-\infty, \infty, H)$ analogonu uogólnionej transformacji Fouriera i pokazujące identyczność jej z transformacją Fouriera dla operatorów z $L_1(-\infty, \infty, H)$.

## 1. PRZESTRZEŃ $L_2(-\infty, \infty, H)$

Niech $H$ będzie dowolną przestrzenią Hilberta nad ciałem liczb zespolonych, z normą $\|.\|_H$ i iloczynem skalarnym $(.\ ,\ .)_H$. Niech $f: R \to H$ będzie operatorem przekształcającym przestrzeń liczb rzeczywistych w przestrzeni $H$. Wówczas

$$L_2(-\infty, \infty, H) = \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H^2\, dt < \infty; \quad t \in R, f(t) \in H \right\}$$

jest zbiorem wszystkich operatorów $f$ o kwadracie normy w $H$ całkowalnym w sensie Lebesgue'a. Jeśli nie będziemy rozróżniali operatorów $f$ równych w $R$ prawie wszędzie (tzn. za elementy $L_2(-\infty, \infty, H)$ będziemy faktycznie uważali klasy abstrakcji operatorów o jednakowej całce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H^2\, dt),$$

to nietrudno przekonać się, że zbiór $L_2(-\infty, \infty, H)$ z działaniami przeniesionymi z przestrzeni $H$ jest przestrzenią liniową operatorów $f$ nad ciałem liczb zespolonych. Oznaczymy ją w tej pracy krótko przez $L_2$. W przestrzeni $L_2$ wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t), g(t))_H \, dt, \quad \text{gdzie} \quad f, g \in L_2.$$

Całka w prawej części istnieje, ponieważ z nierówności Cauchy-Buniakowskiego mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t), g(t))_H \, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(f(t), f(t))_H} \sqrt{(g(t), g(t))_H} \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H \|g(t)\|_H \, dt \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \|g(t)\|_H^2 \, dt\right) < \infty,$$

W związku z tym wprowadzamy w $L_2$ normę $\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H^2 \, dt}$ i metrykę $\varrho_{L_2}(f, g) = \|f - g\|_{L_2}$, gdzie $f, g \in L_2$. Ponieważ $L_2$ jest przestrzenią zupełną, więc jest przestrzenią Hilberta.

## 2. UOGÓLNIENIE TRANSFORMACJI FOURIERA W $L_2(-\infty, \infty, H)$

Twierdzenie

Niech $f \in L_2$ i $g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx$. Wówczas

$1^0$ $\forall N \in R$ $g_N \in L_2$;

$2^0$ $\exists \lim_{N \to \infty} {}_{L_2} \, g_N = g \in L_2$;

$3^0$ jeśli $g_N^I(\lambda) = \int_{-N}^{N} f^I(x) e^{-i\lambda x} \, dx$, $g_N^{II}(\lambda) = \int_{-N}^{N} f^{II}(x) e^{-i\lambda x} \, dx$

$(f^I, f^{II} \in L_2)$,

$\lim_{N \to \infty} {}_{L_2} \, g_N^I = g^I$ i $\lim_{N \to \infty} {}_{L_2} \, g_N^{II} = g^{II}$, to $(g^I, g^{II})_{L_2} = 2\pi(f^I, f^{II})_{L_2}$;

$4^0$ jeśli $f \in L_1(-\infty, \infty, H)$, to $g = F[f]$.

Dowód

Idea dowodu polega na tym, że twierdzenie udowadniamy najpierw dla operatorów, będących elementami $S_{\infty;H}$ (klasa operatorów szybko malejących w nieskończoności), a następnie uogólniamy dla dowolnych elementów $L_2$, korzystając z faktu, że zbiór $S_{\infty,H}$ jest w $L_2$ wszędzie gęsty.

Lemat

Zbiór $S_{\infty,H}$ jest w $L_2$ wszędzie gęsty. Niech $\varphi \in L_2$, a $\chi_a(x)$ jest funkcję charakterystyczną odcinka <-a, a>. Rozpatrzmy $\{f_a^\delta\}$ - zbiór operatorów z $S_{\infty,H}$ takich, że przy ustalonym $a \|f_a^\delta(1-\chi_a)\|_{L_2} < \delta$. Oznaczmy $f_a = f_a^\delta(1-\chi_a)$. Oczywiście $f_a \in S_{\infty,H}$. Dalej, dla każdego $\delta > 0$ istnieje operator $\varphi_b^*$, równy $\bar{0} \in H$ zewnątrz odcinka <-b, b>, posiadający pochodne wszystkich rzędów i taki, że

$$\int_{-b}^{b} \|\varphi(x) - \varphi_b^*(x)\|_H^2 \, dx < \delta, \quad \text{ponieważ} \quad \varphi \in L_2. \tag{1}$$

Mamy także ( $\varphi \in L_2$):

$$\forall \delta \, \exists c \int_{|x|<c} \|\varphi(x)\|_H^2 \, dx < \delta. \tag{2}$$

Oznaczmy teraz $h = \max(a,b,c)$ oraz $\varphi_h = f_h + \varphi_h^*$ analogicznie do powyższych określeń. Zauważmy, że $\varphi_h$ jest także elementem $S_{\infty,H}$. Mamy więc

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L_2} = \|\varphi - f_h - \varphi_h^*\|_{L_2} \leq \|\varphi - \varphi_h^*\|_{L_2} + \|f_h\|_{L_2} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(x) - \varphi_h^*(x)\|_H^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \|f_h\|_{L_2} <$$

$$< \left(\int_{-h}^{h} \|\varphi(x) - \varphi_h^*(x)\|_H^2 \, dx + \int_{|x|>h} \|\varphi(x) - \varphi_h^*(x)\|_H^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \delta <$$

$$< (\delta + \delta)^{\frac{1}{2}} + \delta = \sqrt{2\delta} + \delta = \varepsilon.$$

Ponieważ liczba $\delta > 0$ wybrana jest dowolnie (natomiast h jest zależne od $\delta$), więc $\varepsilon = \sqrt{2\delta} + \delta$ jest też dowolną liczbą dodatnią. Pokazaliśmy więc, że $\forall \varphi \in L_2 \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \varphi_h \in S_{\infty,H} \; \|\varphi - \varphi_h\|_{L_2} < \varepsilon$, co kończy dowód lematu.

Udowodnimy teraz tezę 3° twierdzenia dla operatorów szybko malejących. Niech $f_1, f_2 \in S_{\infty,H}$ oraz $g_1 = F[f_1]$, $g_2 = F[f_2]$ (dla operatorów z $S_{\infty,H}$ określona jest transformacja Fouriera i odwrotna transformacja Fouriera patrz Lit. poz. [3]). Mamy

$$(f_1,f_2)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x), f_2(x))_H \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\, e^{i\lambda x} \, d\lambda, \, f_2(x)\right)_H dx \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(g_1(\lambda),\ f_2(x))_H\ d\lambda \overset{(4)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\ (g_1(\lambda),\ f_2(x))_H dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (g_1(\lambda),\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\ f_2(x)\ dx)_H\ d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (g_1(\lambda),\ g_2(\lambda))_H\ d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ (g_1,\ g_2)_{L_2}.$$

Uzasadnimy prawdziwość równości (3) i (4); przejście (3) polega na wyniesieniu całki z argumentu iloczynu skalarnego na cały iloczyn skalarny, przejście (4) - na zamianie kolejności całkowania. Prawomocność tych operacji wynika z ciągłości iloczynu skalarnego po obu jego argumentach oraz z faktu, że odpowiednia całka podwójna jest bezwzględnie zbieżna w płaszczyźnie $(\lambda,\ x)$; ponieważ $f_1,\ g_1 \in S_{\infty,H}$, więc mamy

$$\| x^p\ f_2^{(p)}\|_H < C_{p,q},\quad \|\lambda^r\ g_1^{(s)}\|_H < D_{r,s},$$

a zatem

$$|x^p|\ \|f_2^{(q)}\|_H < C_{p,q},\quad \sqrt{(f_2,\ f_2)_H} < \frac{C_{p,1}}{|x^p|}$$

i analogicznie

$$\sqrt{(g_1,\ g_1)_H} < \frac{D_{r,1}}{|\lambda^r|}.$$

Z otrzymanych nierówności oraz nierówności Cauchy-Buniakowskiego wynika

$$|(g_1(\lambda),\ f_2(x))_H| \leqslant \sqrt{(g_1,\ g_1)_H}\cdot\sqrt{(f_2,\ f_2)_H} < \frac{C_{p,1}}{|x^p|}\ \frac{D_{r,1}}{|\lambda^r|}$$

Niech teraz $f^a \in L_2$ jest dowolnym operatorem z $L_2$ równym $\vec{0} \in H$ zewnątrz odcinka $\langle -a,a\rangle$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f^a(x)\|_H\ dx = \int_{-a}^{a} \|f^a(x)\|_H\ dx < \infty,$$

a zatem $f^a \in L_1$ i posiada transformację Fouriera

$$F\left[f^a\right](\lambda) = g^a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^a(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Weźmy ciąg $\left\{f_n^a\right\} \subset S_{\infty,H}$ operatorów równych $\vec{0} \in H$ zewnątrz odcinka $\langle -a,a \rangle$ i takich, że $\lim_{n\to\infty} {}_{L_2} f_n^a = f^a$. Istnienie takiego ciągu wynika z faktu, że zbiór $S_{\infty,H}$ jest w $L_2$ wszędzie gęsty. Wprowadzimy nierówność pomocniczą. Niech $\varphi, \psi \in L_2$, wówczas z nierówności Cauchy-Buniakowskiego

$$\left|(\varphi,\psi)_{L_2}\right|^2 \leqslant (\varphi,\varphi)_{L_2}\ (\psi,\psi)_{L_2}$$

mamy

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(t),\ \psi(t))_H\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(t),\ \varphi(t))_H\, dt \int_{-\infty}^{\infty}(\psi(t),\ \psi(t))_H\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(t)\|_H^2 \int_{-\infty}^{\infty}\|\psi(t)\|_H^2\, dt.$$

Weźmy $\varphi(t) = \varphi^a(t)$ - operator równy $\vec{0}$ zewnątrz $\langle -a,a \rangle$ i

$$\psi(t) = \frac{1}{\|\varphi(t)\|_H}\, \varphi^a(t),$$

otrzymujemy

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi^a(t)\|_H\, dt\right|^2 \leqslant \sqrt{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi^a(t)\|_H^2\, dt,$$

czyli

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi^a(t)\|_H\, dt\right| \leqslant \sqrt{2a}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi^a(t)\|_H^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jeśli teraz w otrzymanej nierówności podstawimy $\varphi^a = f_n^a - f^a$, to

$$\|f_n^a - f^a\|_{L_1} \leqslant \sqrt{2a}\ \|f_n^a - f^a\|_{L_2};$$

oznacza to, że ciąg $\left\{f_n^a\right\}$ jest zbieżny do $f^a$ w metryce $L_1$. Z własności transformacji Fouriera [3], własność 1) wynika, że ciąg transformacji Fouriera $\left\{g_n^a\right\}$ jest zbieżny do $g^a$ w przestrzeni $L_1$ (jednostajnie w H). Prócz tego, $\left\{g_n^a\right\}$ jest ciągiem fundamentalnym w przestrzeni $L_2$, ponieważ

$$\|g_m^a - g_n^a\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}\ \|f_m^a - f_n^a\|_{L_2},$$

co dla operatorówz $S_{\infty,H}$ już pokazaliśmy.

Z zupełności przestrzeni $L_2$ wynika istnienie granicy $g^*$ ciągu operatorów $\{g_n^a\}$: $g^* = \lim_{n\to\infty} {}_{L_2}\, g_n^a$. Granica ta jest właśnie transformacją Fouriera operatora $f^a$: $g^* = g^a$, ponieważ ciąg $\{g_n^a(\lambda)\}$ jest zbieżny w H jednostajnie po zmiennej $\lambda$.

Niech teraz $g^{Ia}$ i $f^{IIa}$, są transformatorami Fouriera operatorów $f^{Ia}$ i $f^{IIa}$, będących elementami $L_2$ i równych $\bar{0}$ zewnątrz odcinka <-a,a> (analogicznie do omawianych wyżej $g^a$ i $f^a$). Wówczas

$$(g^{Ia}, g^{IIa})_{L_2} = (\lim_{n\to\infty} {}_{L_2}\, g_n^{Ia}, \lim_{n\to\infty} {}_{L_2}\, g_n^{IIa})_{L_2} = \lim_{n\to\infty} (g^{Ia}, g^{IIa})_{L_2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi(f^{Ia}, f^{IIa})_{L_2} = 2\pi(\lim_{n\to\infty} {}_{L_2}\, f_n^{Ia}, \lim_{n\to\infty} {}_{L_2}\, f_n^{IIa})_{L_2} = 2\pi(f^{Ia}, f^{IIa})_{L_a}$$

Otrzymana równość jest prawdziwa, ponieważ iloczyn skalarny jest funkcją ciągłą swoich argumentów i ciągi $\{g_n^{Ia}\}$, $\{g_n^{IIa}\}$ są zbieżne w przestrzeni H jednostajnie.

W ten sposób udowodniliśmy tezę 3° twierdzenia dla dowolnych, równych $\bar{0} \in H$ zewnątrz odcinka <-a,a>, operatorów z przestrzeni $L_2$:

$$(g^{Ia}, g^{IIa})_{L_2} = 2\pi\,(f^{Ia}, f^{IIa})_{L_2}. \tag{5}$$

Niech wreszcie $f$ jest dowolnym elementem $L_2$. Przyjmijmy

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \le N; \\ \bar{0}, & |x| > N. \end{cases}$$

Ciąg operatorów $f_N$ jest oczywiście fundamentalny w $L_2$ i $\|f - f_N\|_{L_2} \to 0 (n\to\infty)$. Prócz tego, każdy z operatorów $f_N$ należy do $L_1$, więc istnieje jego transformacja Fouriera w $L_1$:

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Udowodniliśmy tezę 1° twierdzenia.

Ciąg operatorów $\{f_N\}$ jest fundamentalny w $L_2$, bowiem jak pokazaliśmy wyżej (wzór (5))

$$\|g_N - g_M\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}\ \|f_N - f_M\|_{L_2}.$$

a ponieważ przestrzeń $L_2$ jest zupełna, więc istnieje jego granica w $L_2$:

$$\lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, g_N = g \in L_2.$$

Udowodniliśmy tezę $2^\circ$ twierdzenia.

Jeśli $f^I$, $f^{II} \in L_2$, i $f_N^I$, $f_N^{II}$, $g_N^I$, $g_N^{II}$ rozumiemy, jak wyżej, to

$$(g^I, g^{II})_{L_2} = (\lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, g_N^I, \lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, g_N^{II})_{L_2} = \lim_{N\to\infty}(g_N^I, g_N^{II})_{L_2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\pi(f_N^I, f_N^{II})_{L_2} = 2\pi(\lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, f_N^I, \lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, f_N^{II})_{L_2} = 2\pi(f^I, f^{II})_{L_2}.$$

Udowodniliśmy tezę $3^\circ$ twierdzenia.

Niech $f \in L_1$. Wówczas dla operatora $f$ w $L_1$ jest określona transformacja Fouriera

$$\bar{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Pokazaliśmy już, że zbudowany dla $f$ ciąg operatorów $\{f_N\}$ zawiera się w $L_1$ i $\lim_{N\to\infty} {}_{L_1}\, f_N = f$. Wynika stąd, że ciąg $\{g_N\}$ jest zbieżny do $\bar{g}$ jednostajnie w całej przestrzeni H. Udowodniliśmy także, że

$$\exists \lim_{N\to\infty} {}_{L_2}\, g_N = g.$$

Z faktu zbieżności jednostajnej ciągu $\{g_N(\lambda)\}$ w przestrzeni H wynika $\bar{g}=g$. Udowodniliśmy tezę $4^\circ$ twierdzenia, co kończy dowód całego twierdzenia.

LITERATURA

[1] Kołmogorow A.N., Fomin S.W.: Elementy teorii funkcij i funkcjonalnogo analiza, Nauka, Moskwa 1972.

[2] Schwartz L.: Analiz, "Mir", Moskwa 1972.

[3] Paczuła A.: Analogon transformacji Fouriera w przestrzeni $L_1(-\infty, \infty, B)$, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej.

АНАЛОГ ОБОБЩЁННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(-\infty, \infty, H)$

Р е з ю м е

В работе рассматривается пространство $L_1(-\infty, \infty, H)$, а также пространство $L_2(-\infty, \infty, H)$ над полем комплексных чисел; это - гильбертовы пространства операторов, действующих из пространства вещественных чисел в произвольное гильбертово пространство H, нормы( соответственно: квадраты норм) которых интегрируемы в H по Лебегу в пределах $(-\infty, \infty)$. Доказывается теорема (аналогична теореме Планшереля, 1910), оправдывающая введение в $L_2(-\infty, \infty, H)$ аналога обобщённого преобразования Фурье, и показывающая его тождественность с преобразованием Фурье для операторов из $L_1(-\infty, \infty, H)$.

L'ANALOGUE DE LA TRANSFORMATION GENERALISEE
DE FOURIER DANS L'ESPACE $L_2(-\infty, \infty, H)$

R e s u m é

Dans ce travail on considère l'espace $L_1(-\infty, \infty, H)$ et l'espace $L_2(-\infty, \infty, H)$ sur le corps des nombres complexes; ce sont les espaces d'Hilbert des opérateurs de l'espace des nombres réels à un espace quelconque H d'Hilbert, les normes (respectivement les carrés des normes) desquels sont intégrables au sens de Lebesgue dans les limites $(-\infty, \infty)$. On demontre le théorème de Plancherel, (1910), qui justifie l'application dans $L_2(-\infty, \infty, H)$ de l'analogue de la transformation géneralisee de Fourier et qui montre l'identité de la transformation précitée et de celle de Fourier pour les operateurs dans $L_1(-\infty, \infty, H)$.