ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Barbara LUKS-OGRODNIK

ZASTOSOWANIE METODY TRANSFORMATY CZEBYSZEWA
W APROKSYMACJI FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Streszczenie. W pracy uogólniono wyniki uzyskane przez P.L. Butzera, R.L. Stensa [1], [2] na funkcje przestrzeni L_w^p z normami mieszanymi z wagą $w(x_1, x_2)$.

Niech

$$X = L^p_{w;[-1,1;-1,1]},$$

gdzie

$$p = (p_1, p_2), \quad p_1, p_2 \geq 1,$$

$$w(x_1,x_2) = w(x_1)w(x_2) = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}},$$

oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych dwóch zmiennych, określonych w $[-1,1;-1,1]$, dla których istnieje i jest skończona całka

$$\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|f(x_1,x_2)|^{p_1} w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}.$$

Jako normę w tej przestrzeni przyjmujemy

$$\|f\|_X = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|f(x_1,x_2)|^{p_1} w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}.$$

Można łatwo wykazać, że

$$L_w^{(p_1,p_2)} \subset L_w^{(1,1)} \quad \text{i} \quad \|f\|_{L_w^{(1,1)}} \leq \|f\|_{L_w^{(p_1,p_2)}}.$$

Dokonując prostej zamiany zmiennych można dalej wykazać, że

$$\|f\|_{L_w^P} = \|f\circ\cos\|_{L_{2\pi}^P} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\circ\cos(Q_1,Q_2)\right|^{P_1} dQ_1\right]^{\frac{P_2}{P_1}} dQ_2\right\}^{\frac{1}{P_2}}.$$

Wielomianem Czebyszewa $T_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ stopnia n_1 ze względu na x_1 i stopnia n_2 ze względu na x_2 nazywamy wielomian

$$T_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \cos(n_1 \operatorname{arcos} x_1)\cos(n_2 \arccos x_2).$$

Zdefiniujemy teraz transformatę Czebyszewa dla funkcji $f \in X$.

Definicja 1

Transformatą Czebyszewa funkcji $f \in X$ nazywamy

$$\mathcal{T}[f](k_1,k_2) = \hat{f}(k_1,k_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)T_{k_1k_2}(x_1x_2)w(x_1,x_2)dx_1.dx_2$$

Wykażemy teraz kilka podstawowych własności transformaty Czebyszewa.

Lemat 1

Niech $f,g \in X$, $c \in R$. Wtedy:

(i) $$\left|\mathcal{T}[f](k)\right| \leq \|f\|_X \quad k \in (N \cup \{0\}) \times (N \cup \{0\});\ k(k_1,k_2)$$

(ii) $$\mathcal{T}[f+g](k) = \mathcal{T}[f](k) + \mathcal{T}[g](k)$$

$$\mathcal{T}[cf](k) = c\mathcal{T}[f](k),$$

(iii) $$\lim_{|k|\to\infty}\mathcal{T}[f](k) = 0 \quad \text{dla} \quad k \in (N \cup \{0\})\times(N \cup \{0\}) \Longleftrightarrow f = 0$$

prawie wszędzie $w[-1,1,-1,1]$.

Dowód

(i) $$\left|\mathcal{T}[f](k)\right| \leq \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|f(x_1,x_2)\ T_{k_1k_2}(x_1,x_2)\right| w(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$\leq \|f\|_{L_w^{(11)}} \leq \|f\|_{L_w^P}.$$

Własność (ii) wynika bezpośrednio z definicji transformaty. Dla dowodu (iii) oraz (iv) wykażemy wpierw związek transformaty Czebyszewa ze skończoną transformatą Fouriera. Transformata Fouriera funkcji $f \in L^p_{2\pi}$ wyraża się wzorem

$$F[f](x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_E F(Q)\, e^{-ixQ}\, dQ \qquad x(x_1, x_2) \in R^2,$$

$$E = [-\pi, \pi; -\pi, \pi], \qquad xQ = x_1Q_1 + x_2Q_2.$$

Dokonując zamiany zmiennych, mamy

$$\mathcal{T}[f](k) = \frac{1}{4\pi^2}\Bigg\{ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos Q_1, \cos Q_2)\cos(k_1Q_1)\cos(k_2Q_2)\,dQ_1 dQ_2 -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos Q_1, \cos Q_2)\sin(k_1Q_1)\sin(k_2Q_2)\,dQ_1 dQ_2 +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos Q_1, \cos Q_2)\cdot i \cdot \cos(k_1Q_1)\sin(k_2Q_2)\,dQ_1 dQ_2 +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos Q_1, \cos Q_2)\cdot i \cdot \sin(k_1Q_1)\cos(k_2Q_2)\,dQ_1 dQ_2 \Bigg\} =$$

$$= F[f \circ \cos](k_1, k_2).$$

Własności (iii), (iv) wynikają więc z analogicznych własności skończonej transformaty Fouriera. Wprowadzimy teraz operator translacji $(\tau_{h_1h_2} f)$; $|h_i| \leqslant 1$; $i=1,2$.

<u>Definicja 2</u>

Operatorem translacji $\tau_{h_1h_2} f$ nazywamy

$$(\tau_{h_1h_2} f)(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\Big\{ f\Big[x_1h_1 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};\ x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\,\Big] +$$

$$+ f\Big[x_1h_1 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};\ x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\,\Big] +$$

$$+ f\left[x_1h_1 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};\ x_2h_2 + \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\right] +$$

$$+ f\left[x_1h_1 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-h_1^2)};\ x_2h_2 - \sqrt{(1-x_2^2)(1-h_2^2)}\right]\Big\} =$$

$$= \tau_{h_1 1}(\tau_{1h_2}f)(x_1,x_2) = \tau_{1h_2}(\tau_{h_1 1}f)(x_1,x_2)$$

Operator translacji $\tau_{h_1h_2}f$ spełnia następujące związki:

Lemat 2

Niech $f \in X$. Wtedy

(i) $$\|\tau_{h_1h_2}f\|_X \le \|f\|_X \qquad |h_i| < 1; \quad i=1,2.$$

(ii) $$(\tau_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) = (\tau_{x_1x_2}f)(h_1,h_2)$$

(iii) $$\|\tau_{h_1h_2}f - f\| \le \|\tau_{h_1 1}f - f\| + \|\tau_{1h_2}f - f\|$$

(iv) $$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to 1\\ |h_i|<1}} \|\tau_{h_1h_2}f - f\| = 0$$

(v) $$\left[\tau_{h_1h_2}f\right]^{\wedge}(k_1,k_2) = T_{k_1k_2}(h_1,h_2)f^{\wedge}(k_1,k_2)$$

(vi) $$(\tau_{h_1h_2}T_{l_1l_2})(x_1,x_2) = T_{l_1l_2}(h_1,h_2)\,T_{l_1l_2}(x_1,x_2)$$

(vii) $$\left[\tau_{h_1h_2}(af+bg)\right](x_1,x_2) = a\tau_{h_1h_2}f + b(\tau_{h_1h_2}f)(x_1,x_2) \qquad a,b \in R.$$

Dowód (i)

$$\|\tau_{h_1h_2}f\|_X \le \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left[\cos(Q_1+\varphi_1);\ \cos(Q_2+\varphi_2)\right|^{p_1}dQ_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dQ_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$+ \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\ \cos(Q_2+\varphi_2)\right]\right|^{p_1}dQ_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dQ_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$+ \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left[\cos(Q_1+\varphi_1),\ \cos(Q_2-\varphi_2)\right]\right|^{p_1}dQ_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dQ_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\ \cos(Q_2-\varphi_2)\right]\right|^{p_1}dQ_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}dQ_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leqslant 4\ \frac{1}{4}\ \|f\circ\cos\|_{L^P_{2\pi}} = \|f\|_X$$

Własność (ii) wynika bezpośrednio z definicji.

(iii) $$\|\tau_{h_1h_2}f - f\| = \|\tau_{h_11}(\tau_{1h_2}f) - \tau_{h_11}f + \tau_{h_11}f - f\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\tau_{h_11}(\tau_{1h_2}f - f)\| + \|\tau_{h_11} - f\| \leqslant \|\tau_{1h_2}f - f\| + \|\tau_{h_11} - f\|$$

(iv) Korzystając z nierówności Minkowskiego oraz twierdzenia 1 z [[3], część II] mamy

$$\|\tau_{h_1h_2}f - f\|_X \leqslant \|f\circ\cos(Q_1+\varphi_1,\ Q_2+\varphi_2) - f\circ\cos(Q_1,Q_2)\|_{X_{2\pi}},$$

gdzie prawa strona nierówności dąży do zera przy $(\varphi_1,\ \varphi_2)\to 0$, czyli

$$\|\tau_{h_1h_2}f - f\|\to 0 \quad \text{gdy} \quad (h_1,h_2)\to 1; \quad |h_i|\leqslant 1; \quad i = 1,2.$$

(v) $$[\tau_{h_1h_2}f]^\wedge(k_1,k_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\Big\{f\left[\cos(Q_1+\varphi_1);\ \cos(Q_2+\varphi_2)\right] +$$

$$+ f\left[\cos(Q_1+\varphi_1),\ \cos(Q_2-\varphi_2)\right] + f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\ \cos(Q_2+\varphi_2)\right]$$

$$+ f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\ \cos(Q_2-\varphi_2)\right]\Big\}\cos(k_1Q_1)\cos(k_2Q_2)dQ_1dQ_2$$

Obliczmy jedną całkę z tej sumy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left[\cos(Q_1+\varphi_1),\ \cos(Q_2+\varphi_2)\right]\cos(k_1Q_1)\cos(k_2Q_2)dQ_1dQ_2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left[\cos(Q_1),\ \cos(Q_2)\right]\cos\left[k_1(\varphi_1-Q_1)\right]\cos\left[k_2(\varphi_2-Q_2)\right]dQ_1dQ_2 =$$

$$= \cos(k_1\varphi_1)\cos(k_2\varphi_2)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left[\cos Q_1,\cos Q_2\right]\cos(k_1Q_1)\cos(k_2Q_2)dQ_1dQ_2 =$$

$$= 4\pi^2\ T_{k_1}(h_1)\ T_{k_2}(h_2)\ f^\wedge(k_1,k_2).$$

Postępując analogicznie z każdą całkę, otrzymamy (ϑ).

(ϑi) $$\left[\tau_{h_1h_2} T_{l_1l_2}\right]^{\wedge}(k_1k_2) = T_{k_1k_2}(h_1,h_2)\left[T_{l_1l_2}\right]^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= \left[T_{l_1l_2}(h_1,h_2)\, T_{l_1l_2}(x_1,x_2)\right]^{\wedge}(k_1,k_2),$$

czyli

$$(\tau_{h_1h_2} T_{l_1l_2})(x_1,x_2) = T_{l_1l_2}(h_1,h_2)\, T_{l_1l_2}(x_1,x_2).$$

Własność (ϑii) jest oczywista.

Definicja 3

Niech f i g będą mierzalne na $I = [-1,1,\ -1,1]$. Wtedy splotem funkcji $f \circledast g$ nazywamy

$$(f \circledast g)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\tau_{x_1x_2} f)(u_1,u_2)\, g(u_1,u_2)\, w(u_1,u_2)du_1du_2,$$

o ile ta całka istnieje.

Twierdzenie 1

Niech $f \in X$, $g \in L_w^{(1,1)}$. Wtedy $f \circledast g$ istnieje prawie wszędzie w X oraz zachodzą związki

(i) $$\|f \circledast g\|_X \leqslant \|f\|_X\, \|g\|_{L_w^{(1,1)}},$$

(ii) $$[f \circledast g]^{\wedge}(k_1,k_2) = f^{\wedge}(k_1,k_2)\, g^{\wedge}(k_1,k_2).$$

Dowód

Rozpatrzmy

$$(f \circledast g)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\tau_{x_1x_2} f)(u_1,u_2)\, g(u_1,u_2)\, w(u_1,u_2)du_1du_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\ \cos(Q_2-\varphi_2)\right]\, g(\cos Q_1, \cos Q_2)dQ_1dQ_2$$

$$= (f\circ\cos * g\circ\cos)\ (Q_1,Q_2),$$

który istnieje prawie wszędzie w X, gdyż $f\circ\cos \in X_{2\pi}$, $g\circ\cos \in L_{2\pi}^{(1,1)}$. W dowodzie własności (i) korzystamy z uogólnionej nierówności Minkowskiego. Mamy:

$$\|f\circledast g\|_X = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|f\circledast g|^{p_1} w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left|(\tau_{x_1x_2}f)(u_1,u_2)\right|^{p_1} w(x_1)dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} w(x_2)dx_2\right\}^{\frac{1}{p_2}}\cdot$$

$$\cdot\left|g(u_1,u_2)\right| w(u_1,u_2)du_1du_2 =$$

$$\leq \|f\|_X\cdot\|g\|_{L_w^{(1,1)}},$$

(ii)
$$(f\circledast g)^\wedge(k_1,k_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\tau_{x_1x_2}f)(u_1,u_2)\cos(k_1\arccos x_1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos(k_2\arccos x_2)\, w(x_1)\, w(x_2)dx_1dx_2\right]g(u_1u_2)\, w(u_1u_2)du_1du_2$$

$$= f^\wedge(k_1,k_2)\, g^\wedge(k_1,k_2).$$

Wprowadzimy teraz definicję pochodnych cząstkowych Czebyszewa dla funkcji $f \in X$.

<u>Definicja 4</u>

Niech $f \in X$. Jeżeli istnieje funkcja $g \in X$, taka, że

$$\lim_{(h_1)\to 1^-}\left\|\frac{(\tau_{h_1,1}f)(x) - f(x)}{1-h_1} - g\right\| = 0, \qquad x = (x_1,x_2)$$

to funkcję g nazywamy pierwszą pochodną cząstkową Czebyszewa funkcji f względem x_1 i oznaczamy $g = D_{x_1}^1 f$. Analogicznie, jeżeli istnieje $g_1 \in X$ taka, że

$$\lim_{h_2\to 1^-}\left\|\frac{(\tau_{1h_2}f)(x) - f(x)}{1-h_2} - g_1\right\| = 0,$$

to $g_1 = D_{x_-}^1 f$.

Wykażemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2

Jeżeli istnieje $D^1_{x_i} f \in X$; $i=1,2$, to

$$(D^1_{x_i} f)\hat{}(k_1,k_2) = (-k_i^2) f\hat{}(k_1,k_2) \quad i=1,2.$$

Dowód

$i = 1$

$$\left| \frac{\left[T_{k_1,k_2}(h_1,1) - 1\right] f\hat{}(k_1,k_2)}{1 - h_1} - \left[D^1_{x_1} f\right](k_1,k_2) \right| = \left| \left[\frac{\tau_{h_1 1} f - f}{1 - h_1} - D^1_{x_1} f \right]\hat{} (k_1 k_2) \right|$$

$$\leqslant \left\| \frac{(\tau_{h_1 1}) f - f}{1 - h_1} - D^1_{x_1} f \right\|.$$

Ponieważ zakładamy, że $D^1_{x_1} f$ istnieje, więc prawa strona nierówności dąży do zera, gdy $h_1 \longrightarrow 1^-$, czyli

$$\lim_{h_1 \longrightarrow 1^-} \frac{T_{k_1,k_2}(h_1,1) - 1}{1 - h_1} f\hat{}(k_1,k_2) = \left[D^1_{x_1} f\right]\hat{}(k_1,k_2).$$

Na podstawie reguły de l'Hospitala otrzymamy tezę. Dowód dla $i = 2$ analogiczny.

Twierdzenie 3

Jeżeli $f \in X$ i istnieje $D^1_{x_i}(f) \in X$, $g \in L^{11}_w$, wtedy istnieje $D^1_{x_i}(f \circledast g)$ i zachodzi równość $D^1_{x_i}(f \circledast g) = (D^1_{x_i} f) \circledast g$ prawie wszędzie w $[-1,1;\ -1,1]$.

Dowód

Wykażemy, że pochodna splotu istnieje prawie wszędzie i jest równa $(D^1_{x_i} f) \circledast g$. Mamy dla $i = 1$

$$\left\| \left(\frac{\tau_{h_1,1}(f \circledast g) - f \circledast g}{1 - h_1} - \left(D^1_{x_1} f\right) \circledast g \right\|_X = \left\| \left[\frac{\tau_{h_1,1} f - f}{1 - h_1} \right] \circledast g - \left(D^1_{x_1} f\right) \circledast g \right\|_X =$$

$$= \left\| \left(\frac{\tau_{h_1,1} f - f}{1 - h_1} - D^1_{x_1} f \right) \circledast g \right\|_X < \left\| \frac{\tau_{h_1,1} f - f}{1 - h_1} - D^1_{x_1} f \right\|_X \cdot \left\| g \right\|_{L^{11}_w}.$$

Prawa strona nierówności dąży do zera, gdy $h_1 \to 1^-$. Równość norm otrzymaliśmy na podstawie równości transformat, dlatego zachodzi ona prawie wszędzie.

Definicja 5

Modułem ciągłości funkcji $f \in X$ nazywamy

$$\omega_1^T(f, \eta_1, \eta_2) := \sup_{\substack{\eta_1 \leqslant h_1 \leqslant 1 \\ \eta_2 \leqslant h_2 \leqslant 1}} \|\tau_{h_1 h_2} f - f\|.$$

Cząstkowymi modułami ciągłości Czebyszewa nazwiemy

$$\omega_1^T(f, \eta_1, 1) = \sup_{\eta_1 \leqslant h_1 \leqslant 1} \|\tau_{h_1 1} f - f\|,$$

$$\omega_2^T(f, 1, \eta_2) = \sup_{\eta_2 \leqslant h_2 \leqslant 1} \|\tau_{1 h_2} f - f\|.$$

Lemat 3

Niech $f \in X$; $|\eta_i| \leqslant 1$ $i = 1,2$. Wtedy

(i) $$\omega_1^T(f, \eta_1, \eta_2) \leqslant \omega_1^T(f, \eta_1, 1) + \omega_2^T(f, 1, \eta_2)$$

(ii) $$\omega_1^T(f, \eta_1, 1) = \omega^{*}(f \cdot \cos, \arccos(\eta_1), 0)$$

(iii) $$\omega_1^T(f, \eta_1, 1) \leqslant \left(1 + \frac{\arccos \eta_1}{\arccos \gamma_1}\right)^2 \omega_1^T(f, \gamma_1, 1); \qquad \gamma_1 \in [-1,1)$$

(iv) $$\lim_{\substack{(\eta_1, \eta_2) \to 1 \\ |\eta_i| \leqslant 1}} \omega_1^T(f, \eta_1, \eta_2) = 0.$$

Dowód

Własność (i) wynika bezpośrednio z definicji modułu ciągłości Czebyszewa i nierówności (iii) z lematu 2

(ii) $$\omega_1^T(f, \eta_1, 1) = \sup_{\eta_1 \leqslant h_1 \leqslant 1} \|\tau_{h_1 1} f - f\| =$$

$$= \sup_{0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \arccos \eta_1} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left| f\left[\cos(Q_1 + \varphi_2), Q_2\right] + \right.\right.\right.$$

$$+ f\left[\cos(Q_1-\varphi_1),\, Q_2\right] - 2f\left[\cos(Q_1),\, \cos Q_2\right]\Big|^{P_1} dQ_1\Big]^{\frac{P_2}{P_1}} dQ_2\Big\}^{\frac{1}{P_2}} =$$

$$= \omega^{*}(f\circ\cos,\ \arccos\eta_1,\ 0).$$

Nierówność (iii) wynika z analogicznej własności cząstkowego modułu gładkości $\omega^{*}(f\circ\cos,\ \arccos\eta_1,\ 0)$, [4]. Własność (iv) wynika z definicji modułu ciągłości Czebyszewa i własności (iv) z lematu 2.

Lemat 4

Niech $f\in X$ i istnieją pochodne cząstkowe Czebyszewa

$$D^1_{x_i}\ f\in X \qquad i = 1,2;$$

wtedy

$$\omega^T_1(f,\ \eta_1,\ 1) \leq C_1(1-\eta_1)\ \|D^1_{x_1} f\|,$$

$$\omega^T_2(f,\ 1,\ \eta_2) \leq C_2(1-\eta_2)\ \|D^1_{x_2} f\|.$$

Dowód dla $i = 1$

Buduję operator

$$(A^1_{h_1,1} f)(x_1,x_2) = \frac{4}{\arccos^2 h_1}\int_{h_1'}^{1}\int_{h_1'}^{1}\left[\tau_{v,1}(\tau_{u,1}f)\right](x_1,x_2)w(u)w(v)du\cdot dv$$

$$h_1\in[-1,1]\quad \arccos h_1' = \frac{1}{2}\arccos h_1.$$

Weźmy teraz $(A^1_{h_1 1}\ D^1_{x_1} f)(x_1,x_2)$. Obliczymy obecnie transformatę Czebyszewa tego operatora.

$$\left[A^1_{h_1 1}\ D^1_{x_1} f\right]^{\wedge}(k_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(A^1_{h_1 1}\ D^1_{x_1} f)(x_1,x_2)\cos(k_1\arccos x_1)\cos(k_2\arccos x_2)\cdot$$

$$\cdot w(x_1)\ w(x_2)dx_1dx_2$$

$$= \frac{4}{\arccos^2 h_1} \int_{h_1}^{1} \int_{h_1}^{1} \left[\tau_{v,1} (\tau_{u,1} D^1_{x_1} f)(x_1,x_2)\right]^{\wedge} (k_1,k_2) w(u) w(v) du \, dv$$

$$= \frac{4}{\arccos^2 h_1} \int_{h_1}^{1} \int_{h_1}^{1} T_{k_1}(v) \, T_{k_1}(u)(-k_1^2) f^{\wedge}(k_1,k_2) \, w(u) \, w(v) du \cdot dv$$

$$= \begin{cases} 1 \; 0 \; f^{\wedge}(0,k_2) & k_1 = 0 \\ \dfrac{2}{\arccos^2 h_1} (T_{k_1}(h_1) - 1) \, f^{\wedge}(k_1,k_2) & k_1 \neq 0. \end{cases}$$

Transformatą funkcji

$$g(x_1,x_2) = \frac{2}{\arccos^2 h_1} (\tau_{h_1,1} f - f)(x_1,x_2)$$

jest

$$g^{\wedge}(k_1,k_2) = \frac{2}{\arccos^2 h_1} (T_{k_1}(h_1) - 1) \, f^{\wedge}(k_1,k_2).$$

Ponieważ $(A^1_{h_1,1} D^1_{x_1} f)^{\wedge}(k_1,k_2) = g^{\wedge}(k_1,k_2)$, więc mamy równość funkcji prawie wszędzie

$$g(x_1,x_2) = (A^1_{h_1 1} D^1_{x_1} f)(x_1,x_2).$$

Dalej

$$\| \tau_{h_1 1} f - f \| = \left\| \frac{\arccos^2 h_1}{2} A^1_{h_1 1} D^1_{x_1} f \right\| \leq C_1 (1-h_1) \| D^1_{x_1} f \|.$$

Z ostatniej nierówności bezpośrednio wynika teza: Drugą nierówność dowodzi się w sposób analogiczny. Zdefiniujemy teraz całkę osobliwą następująco

$$(I_{\varrho_1 \varrho_2} f)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (\tau_{x_1 x_2} f)(u_1,u_2) \, \chi_{\varrho_1 \varrho_2}(u_1,u_2) \, w(u_1,u_2) du_1 du_2$$

$$f \in X, \quad \chi_{\varrho_1 \varrho_2} = \chi_{\varrho_1}(x_1) \, \chi_{\varrho_2}(x_2) \in L^{11}_w;$$

$\chi_{\varrho_1 \varrho_2}$ - funkcja dodatnia $\chi_{\varrho_1 \varrho_2}^{\wedge}(0,0) = 1.$

Lemat 5

Jeżeli χ_{ϱ_i} $i = 1,2$ - jądro dodatnie, wtedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (\arccos u)^k \ \chi_{\varrho_i}(u) \ w(u)\, du \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - [\chi_{\varrho_i}]^{\wedge}(1)}\right)^k \quad k = 1,2.$$

Dowód w pracy P.L. Butzera, R.L. Stensa [2].

Twierdzenie 4

Jeżeli $f \in X$, $\chi_{\varrho_1,\varrho_2}$ jest jądrem o własnościach podanych powyżej, wtedy

$$\| I_{\varrho_1\varrho_2} f - f\| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \Big[\omega_1^T\Big(f, \cos\sqrt{1 - [\chi_{\varrho_1}]^{\wedge}(1)}, 1\Big) +$$

$$+ \omega_2^T\Big(f, 1, \cos\sqrt{1 - [\chi_{\varrho_2}]^{\wedge}(1)}\Big)$$

Dowód

$$\| I_{\varrho_1\varrho_2} f - f\| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \|\tau_{u_1u_2} f - f\| \chi_{\varrho_1}(u_1)\chi_{\varrho_2}(u_2)\, w(u_1)\, w(u_2)\, du_1 du_2$$

$$\leqslant \omega_1^T(f, \gamma_1, 1)\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{\arccos u_1}{\arccos \gamma_1}\right)^2 \chi_{\varrho_1}(u_1) du_1 +$$

$$+ \omega_2^T(f, 1, \gamma_2)\,\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{\arccos u_2}{\arccos \gamma_2}\right)^2 \chi_{\varrho_2}(u_2) du_2$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\omega_1^T(f, \lambda_1, 1) + \omega_2^T(f, 1, \lambda_2)\right],$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \cos\sqrt{1 - [\chi_{\varrho_1}]^{\wedge}(1)},$$

$$\lambda_2 = \cos\sqrt{1 - [\chi_{\varrho_2}]\ (1)}.$$

Wniosek 1

Niech

$$F_{nm}(x_1,x_2) = F_n(x_1)\cdot F_m(x_2),$$

gdzie:

$$F_n(x_1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) T_k(x_1); \quad T_k(x_1) = \cos(k\arccos x_1),$$

$$F_m(x_2) = 1 + 2\sum_{l=1}^{m}\left(1 - \frac{l}{m+1}\right) T_l(x_2);$$

$$(\sigma_{nm} f)(x_1,x_2) = (f \circledast F_{nm})(x_1,x_2)$$ - całka osobliwa Fejéra.

Jest prawdziwa następująca nierówność

$$\|\sigma_{nm} f - f\| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\omega_1^T\left(f, \cos[(n+1)]^{-\frac{1}{2}}, 1\right) + \omega_2^T\left(f, 1, \cos(m+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Bowiem

$$1 - [F_n]^{\wedge}(1) = (n+1)^{-1}.$$

<u>Wniosek 2</u>

Niech $k_{n,m}(x_1,x_2) = k_n(x_1)k_m(x_2)$ całka osobliwa Fejéra-Korowkina

$$k_n(x_1) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\mu_n(j)\, T_j(x) \qquad K_{nm} f = (f \circledast k_{nm})(x_1,x_2),$$

gdzie

$$\mu_n(j) = \frac{1}{2(n+2)\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}\left\{(n-j+3)\sin\left(\frac{(j+1)\pi}{n+2}\right) - (n-j+1)\sin\left(\frac{(j-1)\pi}{n+2}\right)\right\}.$$

Wtedy nierówność z tw. 4 przyjmie postać

$$\|K_{nm} f - f\| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\omega_1^T\left(f, \cos\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}, 1\right) + \right.$$

$$\left. + \omega_2^T\left(f, 1, \cos\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{m+2}\right)}\right)\right],$$

gdyż

$$[k_n]^{\wedge}(1) = \mu_n(1) = \cos\frac{\pi}{n+2}.$$

<u>Twierdzenie 5</u>

Niech $f \in X$, istnieją $D^1_{x_i}(f) \in X$, $i = 1,2$. Wtedy istnieje wielomian algebraiczny $P_{n_1 n_2}(x_1,x_2)$, że

$$\|f - p_{nm}\|_X \leqslant C\left[n^{-2}\|D^1_{x_1} f\|_X + m_2^{-2}\|D^1_{x_2} f\|_X\right]$$

Dowód

Przyjmijmy $P_{nm}(x_1,x_2) = (k_{nm} \circledast f)(x_1,x_2)$. Zgodnie z wnioskiem 2 i lematem 4, mamy

$$\|f - p_{nm}\| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\omega_1^T\left(f, \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}, 1\right) + \right.$$

$$\left. + \omega_2^T\left(f, 1, \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{m+2}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[C_1\left(1 - \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}}\right)\|D^1_{x_1} f\|_X + \right.$$

$$\left. + C_2\left(1 - \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{m+2}}\right)\|D^1_{x_2} f\|_X\right].$$

Ponieważ

$$1 - \cos\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{n+2}} = O(n^{-2})$$

więc

$$\|f - p_{nm}\|_X \leqslant C\left[n^{-2}\|D^1_{x_1} f\|_X + m^{-2}\|D^1_{x_2} f\|_X\right].$$

LITERATURA

[1] Butzer P.L., Stens R.L.: The operational properties of the Chebyshev Transform. Functiones et Approximatic. V. 1977, UAM.

[2] Butzer P.L., Stens R.L.: Chebyshev Transform Methods in the Theory of Best Algebraic Approximation. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 45(1976).

[3] Benedek A., Panzone R.: The spaces L^P, with mixed norm. Duke Mathematical Journal 28(1961).

[4] Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN, 1976.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧЕБЫШЕВА В АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме

В представленной работе обобщены результаты P.L. Butzera, R.L. Stensa на функции пространства L^P_w с миксированными нормами.

THE METHOD OF CHEBYSHEV'S TRANSFORM APPLIED
IN THE APPROXIMATION OF THE FUNCTION
OF TWO VARIABLES

S u m m a r y

The paper generalizes the results of P.L. Butzer, R.L. Stens [1], [2] for functions in the spaces L_w^p, with a mixed norms.