ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Ryszard BARTŁOMIEJCZYK

UOGÓLNIENIE METODY BAIRSTOWA

Streszczenie. Niech f(x) będzie danym wielomianem. Ogólnie znana metoda Bairstowa polega na obliczeniu współczynników kwadratowego dzielnika wielomianu f(x) iteracyjną metodą Newtona. Przedstawiona metoda pozwala na wyliczenie współczynników dzielnika dowolnego stopnia r, $r \geq 2$ przy pomocy iteracyjnej metody Königa o rzędzie s+1, $s \geq 1$. Otrzymane wzory są proste i łatwe do wykorzystania w obliczeniach automatycznych. Praca przedstawia zatem uogólnienie klasycznych wzorów Bairstowa ($r = 2$, $s = 1$) jak również wyników Woźniakowskiego [1], ($s = 1$, r - dowolne).

I. Praca poświęcona jest pewnej metodzie iteracyjnej wyznaczania dzielnika g(x) wielomianu f(x), przy czym zakładamy

$$\text{st } g(x) = r, \quad \text{st } f(x) = n, \quad 2 \leq r \leq n.$$

Postępujemy podobnie jak w klasycznej metodzie Bairstowa [1] wyznaczania czynnika kwadratowego danego wielomianu f(x). Na ogół resztę dzielenia wielomianu f(x) przez wielomian g(x) przedstawiano jako kombinację liniową funkcji

$$1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^{r-1},$$

a następnie współczynniki tej kombinacji liniowej (będące funkcjami współczynników wielomianu g(x)) przyrównywano do zera, otrzymując w ten sposób układ równań, z którego wyznaczono współczynniki wielomianu g(x) (por. [2]).

Wygodniej jest przedstawić odpowiednią resztę jako kombinację liniową funkcji

$$g_0(x),\ g_1(x), \dots,\ g_{r-1}(x),$$

które uzyskujemy, stosując schemat Hornera do wielomianu g(x), a następnie otrzymać analogiczny układ równań.

Do otrzymanego układu równań stosujemy operatorową metodę iteracyjną rzędu s + 1 podaną w [3].

Na ogół metody iteracyjne wyższych rzędów dla układów równań algebraicznych wymagają dużej ilości obliczeń. Jednak w tym szczególnym przypadku wykorzystano specyfikę zagadnienia i uzyskano proste i jednolite wzory obliczeniowe. Wydaje się, że wzory te mogą znaleźć zastosowanie w praktyce numerycznej.

W pracy wykazano również warunek konieczny i dostateczny na to, by rozpatrywana metoda iteracyjna posiadała wykładnik zbieżności równy $s+1$. Jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia podanego w [2]; dotyczy jednak innego układu równań.

II. Rozważmy wielomiany

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{r} p_i x^{r-i}, \quad n, r \in N, \tag{1}$$

o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych.

Dla wielomianu $g(x)$ określamy schemat Hornera

$$g_0(x) = 1, \quad g_i(x) = x g_{i-1}(x) + p_i, \quad i = 1(1)r; \quad g_r(x) = g(x). \tag{2}$$

Twierdzenie 1

Jeżeli

$$B_k = A_k - \sum_{i=1}^{r} p_i B_{k-i}, \quad k = 0(1)n; \quad B_k = 0 \quad \text{dla} \quad k<0, \tag{3}$$

to

$$f(x) = P(x)\, g(x) + Q(x), \tag{4}$$

gdzie

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-r} B_i x^{n-r-i}, \quad Q(x) = \sum_{i=n-r+1}^{n} B_i g_{n-i}(x). \ \square \tag{5}$$

UWAGA

Twierdzenie ma sens dla dowolnych $r, n \in N$, gdyż w przypadku $r > n$ mamy

$$P(x) = 0, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} B_i g_{n-i}(x). \ \square$$

Dowód indukcyjny

Dla $n=1$ mamy

$$f(x) = A_0(x+p_1) + A_1 - A_0 p_1 = B_0 g_1(x) + B_1 g_0(x). \ \square$$

Stosując założenia indukcyjne do wielomianu

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i\, x^{n-1-i},$$

otrzymujemy

$$f_1(x) = \Bigl(\sum_{i=0}^{n-1-r} B_i x^{n-1-r-i}\Bigr) g(x) + \sum_{i=n-r}^{n-1} B_i g_{n-1-i}(x). \tag{6}$$

Ponieważ

$$f(x) = x f_1(x) + A_n$$

więc na podstawie (6) otrzymujemy

$$f(x) = \Bigl(\sum_{i=0}^{n-1-r} B_i x^{n-r-i}\Bigr) g(x) + \sum_{i=n-r}^{n-1} B_i\, x g_{n-1-i}(x) + A_n.$$

Z ostatniej tożsamości na podstawie (2), (3) i (5) otrzymujemy kolejno

$$f(x) = (P(x) - B_{n-r}) g(x) + \sum_{i=n-r}^{n-1} (B_i\, g_{n-i}(x) - P_{n-i}) + B_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} P_i B_{n-i} = P(x) g(x) + \sum_{i=n-r+1}^{n-1} B_i g_{n-i}(x) + B_n. \square\square$$

<u>Wniosek 1</u>

Niech $r < n$. Wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $g(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$B_i = 0, \quad i = n-r+1(1)n. \square \tag{7}$$

<u>Dowód</u>

Ponieważ wielomiany (2) tworzą układ liniowo niezależny, więc $Q(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione równości (7) $\square$

<u>Definicja 1</u>

Dla wielomianów (1) określamy ciąg

$$c_k^{(-1)} = A_k, \quad k = 0(1)n,$$

$$c_k^{(j)} = c_k^{(j-1)} - \sum_{i=1}^{r} p_i\, c_{k-i}^{(j)}, \quad k = 0(1)n, \quad j = 0(1)s, \tag{8}$$

$$c_k^{(j)} = 0 \quad \text{dla} \quad k < 0, \quad j = 0(1)s. \ \square \tag{9}$$

Zauważmy, że

$$c_k^{(o)} = B_k, \quad k = 0(1)n. \tag{9}$$

Twierdzenie 2

Jeżeli $s \in N$, to

$$f(x) = P^{(s)}(x)[g(x)]^s + \sum_{j=0}^{s-1} Q^{(j)}(x)[g(x)]^j, \tag{10}$$

gdzie

$$P^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{n-rs} c_k^{(s-1)}\, x^{n-rs-k},$$

$$Q^{(j)}(x) = \sum_{k=n-(j+1)r+1}^{n-jr} c_k^{(j)}\, g_{n-jr-k}(x), \quad j = 0(1)s-1. \ \square$$

Dowód indukcyjny

Dla $s=1$ otrzymujemy twierdzenie 1. Na podstawie założenia indukcyjnego mamy

$$f(x) = P^{(s-1)}(x)[g(x)]^{s-1} + \sum_{j=0}^{s-2} Q^{(j)}(x)[g(x)]^j. \tag{11}$$

Stosując do wielomianu $P^{(s-1)}(x)$ twierdzenie 1, otrzymujemy

$$P^{s-1)}(x) = P^{(s)}(x)g(x) + Q^{(s-1)}(x).$$

Uwzględniając ostatnią tożsamość w (11) otrzymujemy (10). $\square$

Wniosek 2

Niech $sr \leqslant n$. Wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $[g(x)]^s$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_k^{(j)} = 0, \quad k = n-(j+1)r+1(1)n-jr, \quad j = 0(1)s-1. \ \square$$

III. Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem dzielnika stopnia r-tego wielomianu f(x). Traktując współczynniki $p_1, p_2, \ldots, p_r$ wielomianu g(x) jako zmienne otrzymujemy na podstawie wniosku 1 układ równań algebraicznych

$$B_k(p_1, p_2, \ldots, p_r) = 0, \quad k = n-r+1(1)n, \tag{12}$$

którego rozwiązanie wyznacza dzielnik wielomianu f(x).

Układ równań (12) zapiszemy w postaci operatorowej

$$F(p) = 0, \tag{13}$$

gdzie

$$F(p) = \begin{pmatrix} B_n(p) \\ B_{n-1}(p) \\ \ldots\ldots \\ B_{n-r+1}(p) \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_r \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Obliczmy obecnie kolejne pochodne Frécheta $F^{(j)}(p)$ $(j = 0(1)s)$ operatora (14).

Lemat 1

Zachodzą wzory

$$\frac{\partial C_k^{(j)}}{\partial p_i} = -(j+1)\, C_{k-i}^{(j+1)}, \quad i = 1(1)r, \quad j = 0(1)s, \quad k = 0(1)n. \square \tag{15}$$

Dowód indukcyjny względem zmiennej k.

Dla k=0 mamy

$$\frac{\partial C_0^{(j)}}{\partial p_i} = -(j+1)\, C_{-i}^{(j+1)}, \quad i = 1(1)r, \quad j = 0(1)s. \square \tag{16}$$

Równości (16) zachodzą, gdyż na podstawie (8)

$$C_0^{(j)} = A_0, \quad C_{-i}^{(j+1)} = 0, \quad i = 1(1)r, \quad j = 0(1)s.$$

Zakładając, że wzory (15) zachodzą dla $k \leq \mu$ wykażemy wzory

$$\frac{\partial C_{\mu+1}^{(j)}}{\partial p_i} = -(j+1)\, C_{\mu+1-i}^{(j+1)}, \quad i = 1(1)r, \quad j = 0(1)s.$$

Na podstawie (8) mamy

$$C^{(j)}_{\mu+1} = C^{(j-1)}_{\mu+1} - \sum_{i=1}^{r} p_i\, C^{(j)}_{\mu+1-i},$$

skąd po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu założenia indukcyjnego otrzymujemy kolejno

$$\frac{\partial C^{(j)}_{\mu+1}}{\partial p_i} = \frac{\partial C^{(j-1)}_{\mu+1}}{\partial p_i} - C^{(j)}_{\mu+1-i} - \sum_{k=1}^{r} p_k \frac{\partial C^{(j)}_{\mu+1-k}}{\partial p_i} = -jC^{(j)}_{\mu+1-i} - C^{(j)}_{\mu+1-i} +$$

$$+ (j+1) \sum_{k=1}^{r} p_k\, C^{(j+1)}_{\mu+1-i-k} =$$

$$= -(j+1)\left(C^{(j)}_{\mu+1-i} - \sum_{k=1}^{r} p_k\, C^{(j+1)}_{\mu+1-i-k}\right) = -(j+1)\, C^{(j+1)}_{\mu+1-i}. \ \square\square$$

Z wykazanego lematu i wzoru (9) wynika łatwo

Lemat 2

Dla $j = 0(1)s$, $k = 0(1)n$ zachodzą wzory

$$\frac{1}{j!}\,\frac{\partial B^{j}_{k}}{\partial p_1^{j_1}\, \partial p_2^{j_2} \ldots \partial p_r^{j_r}} = (-1)^j\, C^{(j)}_{k-1\cdot j_1 - 2\cdot j_2 - \ldots - r\cdot j_r},$$

gdzie

$$j_1 \geq 0,\quad j_2 \geq 0,\ \ldots,\ j_r \geq 0,\quad j_1 + j_2 + \ldots + j_r = j. \square$$

Pochodne Frécheta operatora (14) można potraktować jako macierze wielowskaźnikowe; mianowicie

$$\frac{1}{j!} F^{(j)}(p) = \left(\frac{1}{j!}\, \frac{\partial B^{j}_{n+1-i_0}}{\partial p_{i_1}\, \partial p_{i_2} \ldots \partial p_{i_j}} \right)_{i_0, i_1, \ldots, i_j = 1(1)r} =$$

$$= (-1)^j \left(C^{(j)}_{n+1-i_0-i_1-\ldots-i_j} \right)_{i_0, i_1, \ldots, i_j = 1(1)r} \tag{17}$$

dla $j = 0(1)s$.

Definicja 2

Macierz wielowskaźnikową

$$H_j = \left(H_j(i_0, i_1, \ldots, i_j)\right)_{i_0, i_1, \ldots, i_j = 1(1)r}, \quad j \geq 0 \tag{18}$$

nazywamy silnie symetryczną, jeżeli istnieje ciąg

$$a_1, a_2, \ldots, a_{jr+r-j} \tag{19}$$

taki, że

$$H_j(i_0, i_1, \ldots, i_j) = a_{i_0 + i_1 + \ldots + i_j - j}, \quad i_\mu = 1(1)r, \quad \mu = 0(1)j. \tag{20}$$

Ciąg (19) nazywamy wtedy reprezentacją macierzy (18). ▭

Zauważmy, że równości (20) określają przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne między macierzami silnie symetrycznymi (postaci (18)) oraz ich reprezentacjami (19)

Reprezentacją macierzy silnie symetrycznej $\frac{(-1)^j}{j!} F^{(j)}$ (por. (17)) jest ciąg

$$C^{(j)}_{n-j}, C^{(j)}_{n-j-1}, \ldots, C^{(j)}_{n+1-(j+1)r}. \tag{21}$$

Niech macierz silnie symetryczna H_j będzie określona definicją 2 oraz

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)^T,$$

wtedy iloczyn

$$H_j\delta = \left(\sum_{t=1}^{r} a_{i_0 + i_1 + \ldots + i_{j-1} + t-j} \cdot \delta_t\right)_{i_0, \ldots, i_{j-1} = 1(1)r}$$

jest macierzą silnie symetryczną, której reprezentacją jest ciąg

$$b_k = \sum_{t=1}^{r} a_{k+r-t}\ \delta_t, \quad k = 1(1)jr - j + 1.$$

W związku z powyższym iloczyny macierzy silnie symetrycznych przez wektory mogą być wykonywane na reprezentacjach macierzy, a następnie (gdy zajdzie potrzeba) na podstawie otrzymanej reprezentacji konstruujemy macierz będącą wynikiem działania.

IV. Rozwiązanie układu równań (13) wyznaczamy stosując metodę iteracyjną Königa [3]. Mając dane przybliżenie początkowe

$$p^o = (p_1^o, p_2^o, \dots, p_r^o)^T$$

obliczamy kolejne pochodne Frécheta operatora (14)

$$F(p^o) = F_o, \quad F^{(j)}(p^o) = F_o^{(j)}, \quad j = 1(1)s,$$

podstawiając do (17) wartości

$$B_k^{(j)}, \quad k = 1(1)jr+r-j, \quad j = 0(1)s, \tag{22}$$

obliczone według wzorów (8) dla

$$p_i = p_i^o, \quad i = 1(1)r.$$

Następne przybliżenie p^1 wyznaczamy z układu równań

$$\begin{gathered} F_o + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} F_o^{(j)} \Delta_k \Delta_{k-1} \dots \Delta_{k-j+1} = 0, \quad k = 1(1)s \\ p^1 = p^o + \Delta s. \end{gathered} \tag{23}$$

Układ równań (23) można zmodyfikować, przyjmując

$$M_j = \frac{(-1)^j}{j!} F_o^{(j)}, \quad j = 0(1)s; \quad \Delta_j = -\delta_j, \quad j = 1(1)s,$$

wtedy reprezentacją macierzy M_j jest ciąg (21).

Przy wprowadzonych oznaczeniach otrzymujemy

$$\begin{gathered} M_o + \sum_{j=1}^{k} M_j \, \delta_k \, \delta_{k-1} \dots \delta_{k-j+1} = 0, \quad k = 1(1)s, \\ p^1 = p^o - \delta_s. \ \square \end{gathered} \tag{24}$$

Rozpatrzmy obecnie algorytm obliczenia jednej iteracji według wzorów (24). Z (24) otrzymujemy

$$\delta_k = -(M_1 + M_2 \delta_{k-1} + \dots + M_k \delta_k \dots \delta_1)^{-1} M_o, \quad k = 1(1)s.$$

Stąd otrzymujemy bezpośrednio

$$\delta_1 = -M_1^{-1} M_o.$$

Mając obliczone wektory

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, \quad 2 \leqslant k \leqslant s,$$

obliczamy wektor δ_k według następującego schematu Hornera

$$G_{k,1} = M_k,$$

$$G_{k,i+1} = G_{k,i}\delta_i + M_{k-i}, \quad i = 1(1)k-1, \tag{25}$$

$$\delta_k = -G_{k,k}^{-1} M_o,$$

gdzie macierze symetryczne wielowskaźnikowe $G_{k,i+1}$ oraz M_{k-i} $i=0(1)k-1)$ mają te same wymiary.

Obliczenia według wzorów (25) wykonujemy na odpowiednich reprezentacjach macierzy silnie symetrycznych, korzystając z ciągów (21). Postępowanie to powtarzamy dla $k = 2(1)s$, po czym wyznaczymy następne przybliżenie

$$p^1 = p^o - \delta_s.$$

Stosując powyższy schemat, otrzymujemy ciąg

$$p^o, p^1, p^2, \ldots,$$

który jest zbieżny do rozwiązania

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_r^*)^T$$

układu równań (13) z wykładnikiem zbieżności równym $s+1$ (por. [3]) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$J(p^*) = \det(F'(p^*)) \neq 0,$$

oraz gdy przybliżenie początkowe p^o leży dostatecznie blisko p^*.

Jeżeli p^* jest rozwiązaniem układu równań (13) to wielomian

$$g^*(x) = x^r + \sum_{i=1}^{r} p_i^* x^{r-i} \tag{26}$$

jest dzielnikiem wielomianu $f(x)$.

Dla wielomianu $g^*(x)$ określamy schemat Hornera

$$g_o^*(x) = 1, \quad g_i^*(x) = xg_{i-1}^*(x) + p_i^*, \quad i = 1(1)r; \quad g_r^*(x) = g^*(x).$$

Nadto wielkości $C_k^{(1)}$ $(k = n-2r+1(1)n)$ po podstawieniu

$$p_i = p_i^*, \quad i = 1(1)r, \tag{27}$$

oznaczać będziemy C_k^*.
Mamy wtedy

$$J(p^*) = \begin{vmatrix} C_{n-1}^* & C_{n-2}^* & \dots & C_{n-r}^* \\ C_{n-2}^* & C_{n-3}^* & \dots & C_{n-r-1}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-r}^* & C_{n-r-1}^* & \dots & C_{n-2r-1}^* \end{vmatrix} \tag{28}$$

Wykażemy obecnie twierdzenie analogiczne do podanego w [1].

Definicja 3

Wielomian $g^*(x)$ nazywamy dzielnikiem podstawowym wielomianu $f(x)$, jeżeli istnieje wielomian $P^*(x)$ taki, że

$$f(x) = g^*(x)\,P^*(x), \quad (g^*(x), P^*(x)) = 1.$$

Twierdzenie 3

Niech $g^*(x)$ będzie ustalonym dzielnikiem wielomianu $f(x)$. Wyznacznik $J(p^*) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^*(x)$ jest dzielnikiem podstawowym wielomianu $f(x)$.

Dowód

Wykażemy twierdzenie równoważne: Dzielnik $g^*(x)$ wielomianu $f(x)$ nie jest jego dzielnikiem podstawowym wtedy i tylko wtedy, gdy $J(p^*) = 0$. Różniczkując (4) i (5) względem p_k otrzymujemy

$$0 = P(x)x^{r-k} + g(x)R_k(x) + \sum_{i=n-r+1}^{n} g_{n-i}(x)\frac{\partial B_i}{\partial p_k} + \sum_{i=n-r+1}^{n-k} B_i x^{n-i-k},$$

$$k = 1(1)r,$$

gdzie $R_k(x) = \dfrac{\partial P(x)}{\partial p_k}$ jest wielomianem stopnia n-2r+k ze względu na zmienną x. Stąd po podstawieniu (27) mamy

$$0 = P^*(x)x^{r-k} + g^*(x)R_k^*(x) + \sum_{i=n-r+1}^{n} C_{i-k}^* g_{n-i}^*(x), \quad k = 1(1)r, \quad (29)$$

gdyż

$$B_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = n-r+1(1)n.$$

$\Longrightarrow$ Istnieje pierwiastek α wielomianu $f(x)$ taki, że

$$g^*(\alpha) = 0, \quad P^*(\alpha) = 0.$$

Po podstawieniu do (29) $x = \alpha$, otrzymujemy jednorodny układ równań

$$\sum_{i=n-r+1}^{n} C_{i-k}^* g_{n-i}^*(\alpha) = 0, \quad k = 1(1)r,$$

który posiada rozwiązanie niezerowe $1 = g^*(\alpha), g_1^*(\alpha), \ldots, g_{r-1}^*(\alpha)$. $\Longleftarrow$

$\Longleftarrow$ Kolumny wyznacznika (28) tworzą układ liniowo zależny, zatem istnieją stałe $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$, $|\gamma_0| + |\gamma_1| + \ldots + |\gamma_{r-1}| > 0$, takie, że

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_{r-k} C_{i-k}^* = 0, \quad i = n-r+1(1)n. \quad (30)$$

Mnożąc k-te równanie (29) przez γ_{r-k} i następnie dodając stronami dla $k = 1(1)r$, otrzymujemy

$$0 = P^*(x)\sum_{k=1}^{r}\gamma_{r-k}x^{r-k} + g^*(x)\sum_{k=1}^{r}\gamma_{r-k} R_k^*(x) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=n-r+1}^{n}\gamma_{r-k} C_{i-k}^* g_{n-i}^*(x),$$

skąd po zastosowaniu (30) mamy

$$g^*(x) \sum_{k=1}^{r} \gamma_{r-k} R_k^*(x) = -P^*(x) \sum_{k=1}^{r} \gamma_{r-k} x^{r-k}.$$

Skąd wnioskujemy, że wielomian $g^*(x)$ dzieli wielomian

$$P^*(x) \cdot \sum_{k=1}^{r} \gamma_{r-k} x^{r-k},$$

który nie jest tożsamościowo równy 0, a ponieważ

$$\text{st } g^*(x) = r, \quad \text{st}\left(\sum_{k=1}^{r} \gamma_{r-k}\, x^{r-k}\right) \leqslant r - 1,$$

istnieje więc wspólny pierwiastek wielomianów $g^*(x)$ i $P^*(x)$. ▭

LITERATURA

[1] Woźniakowski H.: Some remarks on Bairstow's method. Zastosowania Matematyki XI, 2, 1970.

[2] Legras J.: Praktyczne metody analizy numerycznej. WNT, Warszawa 1974.

[3] Czopik J.: Zastosowanie metod iteracyjnych wyższych rzędów do rozwiązywania równań operatorowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 35 (1979).

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА БЕРСТОВА

Р е з ю м е

В работе обобщается классический итерационный метод Берстова, состоящий в нахождении квадратного трёхчлена, на который делится данный полином $f(x)$.

Приводится итерационный метод порядка сходимости $\nu+1$ нахождения делителя $g(x)$ степени $s+1 (s \in N)$. Остаток от деления полинома $f(x)$ на полином $g(x)$ представлен в виде линейной комбинации очередных полиномов, полученных на пути применения схемы Горнера для полинома $g(x)$. Вследствие приравнения к нулю коэффициентов этой комбинации получается система уравнений, решение которой определяет коэффициенты полинома $g(x)$.

Для решения этой системы применяется итерационный метод Кёнига, порядка сходимости $s+1$.

В общем случае, итерационные методы высших порядков для систем алгебраических уравнений требуют большого количества вычислений. В данном же случае использована специфика проблемы, получены простые и однородные формулы для вычислений. Даётся также необходимое и достаточное условие того, чтобы якобиан рассматриваемой системы уравнений был отличный от нуля.

THE GENERALIZED BAIRSTOW METHOD

S u m m a r y

Let $f(x)$ be a given polynomial. The well-known Bairstow method consists in computing coefficients of the quadratic divisor of $f(x)$ using Newton's iteration.

Our method allows to compute the coefficients of the divisor of arbitrary degree r, $r \geqslant 2$ by the König iterative method of order s+1, $s \geqslant 1$. The obtained formulas are simple and seem easy to apply in authomatic computation. Thus our paper generalizes the clasical Bairstow formulas ($r = 2$, $s = 1$) and the result of Woźniakowski [1] ($s = 1$, r - arbitrary).