ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Janusz CZOPIK

ZASTOSOWANIE METOD ITERACYJNYCH WYŻSZYCH RZĘDÓW DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ OPERATOROWYCH

Streszczenie. W pracy podano kilka przykładów zastosowań metod iteracyjnych wyższych rzędów do rozwiązywania równań operatorowych w przestrzeniach Banacha.

Metody iteracyjne, które użyto do rozwiązywania, są szczególnymi przypadkami metod rozważanych w pracy [3]. Równocześnie w oparciu o wyniki otrzymane w cytowanej pracy, podano oszacowania błędów a posteriori po każdym kroku iteracyjnym, porównując je z podobnymi oszacowaniami innych autorów.

1. Będziemy poszukiwali rozwiązania równania

$$F(x) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie operator nieliniowy $F: D \subset X \rightarrow Y$, X,Y rzeczywiste lub zespolone przestrzenie Banacha, D zbiór otwarty i wypukły.

Do rozwiązania równania (1.1) będziemy stosowali metody iteracyjne określone następującym schematem

$$F_n + F'_n d_{1,n} = 0$$

$$F_n + F'_n d_{k,n} + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} F_n^{(j)} d_{k-i_1,n} \dots d_{k-i_j,n} = 0, \quad k = 2, \dots, m \tag{1.2}$$

$$x_{n+1} = x_n + d_{m,n},$$

przy czym $F_n^{(j)} = F^{(j)}(x_n)$ - wartości pochodnych Frécheta operatora F w punkcie x_n dla $j = 0,1, \dots, m$, m ustalona liczba naturalna ≥ 2, $i_1, \dots, i_m$ liczby całkowite nieujemne spełniające warunki

$$0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$$

$$i_s \leq i_{s-1} + 1 \quad \text{dla} \quad s = 2,3, \dots, m. \tag{1.3}$$

W pracy [3] wykazano (tw. 3.2), że wszystkie metody iteracyjne (1.2) - (1.3) przy ustalonym m posiadają lokalnie rząd zbieżności równy co najmniej $m+1$.

W niniejszej pracy będziemy stosowali do rozwiązania równania (1.1) metodę Schrödera [2] rzędu trzeciego, dla której

$$m = 2, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 1 \tag{1.4}$$

lub rzędu czwartego dla

$$m = 3, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = 1. \tag{1.5}$$

Zagadnienie zbieżności metod (1.4) oraz (1.5) rozstrzyga następujące twierdzenie, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.1 z pracy [3]. Twierdzenie to przytaczamy w wersji dla metod (1.4) i (1.5) dowód w pracy [3].

Niech

$$\varrho_n = \alpha_n + \alpha_{n+1}\,\theta_n + \alpha_{n+2}\,\theta_n\,\theta_{n+1} + \dots, \tag{1.6}$$

gdzie

$$\alpha_n = 2/(2 - \vartheta_n) \tag{1.7}$$

dla metody (1.4) oraz α_n jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania

$$\alpha_n^3 + (5/\vartheta_n)\alpha_n^2 + ((6\vartheta_n - 12)/\vartheta_n^3)\alpha_n + 12/\vartheta_n^3 = 0 \tag{1.8}$$

dla (1.5).

Cięgi $\{\vartheta_n\}$ oraz $\{\theta_n\}$ są określone rekurencyjnie

$$\theta_n = (1/(1 - \alpha_n\,\vartheta_n))(\tfrac{1}{6}\alpha_n^3\,\vartheta_n^3 + \tfrac{1}{2}\alpha_n\,\vartheta_n\,\delta_2) \tag{1.9}$$

dla metody (1.4)

$$\theta_n = (1/(1 - \alpha_n\,\vartheta_n))(\tfrac{1}{6}\alpha_n^3\,\vartheta_n^2 + (\tfrac{1}{2}\alpha_n\,\vartheta_n + \tfrac{1}{6}\alpha_n^2\,\vartheta_n^2)\delta_3) \tag{1.10}$$

dla metody (1.5), przy czym

$$\delta_2 = \tfrac{1}{2}\vartheta_n, \tag{1.11}$$

$$\delta_3 = \alpha_n\,\vartheta_n\,\delta_2 + \tfrac{1}{6}\alpha_n^2\,\vartheta_n^2. \tag{1.12}$$

Kolejny wyraz ciągu $\{\vartheta_n\}$ obliczamy kładąc

$$\vartheta_{n+1} = (\theta_n/(1 - \alpha_n \vartheta_n))\vartheta_n. \tag{1.13}$$

Twierdzenie

Zakładamy, że spełnione są następujące założenia:

(i) istnieje ograniczony operator $F'^{-1}(x_1)$, gdzie $x_1 \in D_F$ jest danym przybliżeniem początkowym,

(ii) istnieje liczba $r_1 > 0$ taka, że w kuli $S_1 := \{x \in D_F : \|x - x_1\| \leq r_1\}$ operator F jest m+1 krotnie różniczkowalny w sensie Frécheta, przy czym $\|F'^{-1}(x_1)\, F^{(j)}(x)\| \leq K_j$ dla każdego $x \in S_1$, $j = 2, \ldots, m+1$. Niech $\zeta_1 = \|F'^{-1}(x_1)\, F(x_1)\|$ oraz $\varrho_1 = r_1/\zeta_1$.

(iii) $K_j\, \zeta_1^{j-1} \leq \vartheta_1^{j-1}$ dla $j = 2, \ldots, m+1$, gdzie ϑ_1 jest pewną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta^*,$$

przy czym

$$\vartheta^* = \begin{cases} 0.467380183 & \text{dla } (1.4) \\ 0.431720981 & \text{dla } (1.5)\end{cases}$$

Wtedy ciąg $\{x_n\}$ dany przez (1.2) oraz (1.4) lub (1.5) jest dobrze określony, $x_n \in S_1$ dla każdego $n \geq 1$. Dalej ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do rozwiązania x^* równania (1.1), które należy do kuli S_1.

Dla błędu mamy następujące oszacowanie

$$\|x^* - x_n\| \leq \varrho_n\, \zeta_n = r_n \quad \text{dla każdego } n \geq 1, \tag{1.14}$$

przy czym

$$\zeta_n = \|F'^{-1}(x_n)F(x_n)\| \tag{1.15}$$

natomiast ϱ_n dane jest wzorem (1.6).

Powyższe twierdzenie w stosunku do znanych w literaturze daje ogólne i jednolite podejście do wielu metod iteracyjnych, wynikających ze schematu (1.2) przy różnych ciągach (1.3). Równocześnie, ponieważ schemat 1.2) generuje ciąg $\{x_n\}$ niezmienniczy ze względu na transformację afiniczną

$$F \to G = AF,$$

gdzie A jest dowolnym operatorem zawartym w przestrzeni B(Y,Z) wszystkich ograniczonych liniowych odwzorowań bijektywnych. z przestrzeni Y do dowolnej przestrzeni Banacha Z, sformułowane twierdzenie ma założenia warunkujące afiniczną niezmienniczość. W szczególności gwarantowane jest afiniczne niezmiennicze oszacowanie błędu. Dla metod wyższych rzędów zagadnienie to nie było brane pod uwagę. Daje to istotne uogólnienie rozważanych metod. Otrzymane oszacowania błędu a posteriori są ostrzejsze niż znane dotychczas w literaturze.

2. Podamy kilka przykładów równań operatorowych wybranych z literatury matematycznej, które będziemy rozwiązywali metodami iteracyjnymi (1.5) lub (1.4). Równocześnie przytoczymy oszacowania błędów, wynikające ze wzoru (1.14) i analogiczne oszacowania innych autorów.

a) Układ równań nieliniowych

Rozwiążemy układ równań nieliniowych

$$\begin{aligned} 2x^3 - y^2 - 1 &= 0, \\ xy^3 - y - 4 &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

który był rozważany przez Kantorowicza [5], Ade [1] i in.

Niech $u = \binom{x}{y} \in X$, gdzie $X = R^2$ przestrzeń wektorowa z normą

$$\|u\| = \max(|x|, |y|).$$

Układ (2.1) możemy zapisać w postaci

$$F(u) = F\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2x^3 - y^2 - 1 \\ xy^3 - y - 4 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.2}$$

Dalej mamy

$$F'(u) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$F'(u)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2\,\Delta x - 2y\,\Delta y \\ y^3\,\Delta x + (3xy^2 - 1)\,\Delta y \end{pmatrix}$$

$$F''(u)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x\,\Delta x dx - 2\Delta y\, dy \\ 3y^2\,\Delta y dx + 3y^2\,\Delta x dy + 6xy\,\Delta y dy \end{pmatrix}.$$

Do rozwiązania (2.1) zastosujemy metodę (1.4). Rozwiązanie dokładne (2.1) z dokładnością do dziesięciu znaków po kropce wynosi

$$u^* = \begin{pmatrix} 1.23427448411 \\ 1.66152646679 \end{pmatrix}.$$

Niech $u_1 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.7 \end{pmatrix}$ oraz $\vartheta_1 = 0.1687$, wtedy

$$\|u^* - u_1\| = \max\begin{pmatrix} 0.034274484 \\ 0.038473533 \end{pmatrix} = 0{,}038473533$$

$$r_1 = 0.043283292$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1.234267765 \\ 1.661561368 \end{pmatrix}$$

$$\|u^* - u_2\| = \max\begin{pmatrix} 0.000006719 \\ 0.000034901 \end{pmatrix} = 0.000034901$$

$$r_2 = 0.000034963.$$

Widzimy, że po wykonaniu jednego kroku iteracyjnego promień $r_2 = \varrho_2 \zeta_2$ kuli $S_2 := \left\{\|u - u_2\| \leqslant r_2\right\}$, obliczony za pomocą wzorów (1.6) i (1.15), jest praktycznie równy wartości normy $\|u^* - u_2\|$.

Analogicznego oszacowania błędu otrzymanego przez Ade [1] nie można porównać z powodu błędnego (począwszy od piątego miejsca po kropce) obliczenia wartości u^* oraz u_2 w pracy [1].

b) Zagadnienie wartości własnych i wektorów własnych macierzy

Rozważymy zagadnienie obliczania wartości własnych macierzy postaci

$$Ax = \lambda Bx, \tag{2.3}$$

gdzie:

A,B - zadane macierze $n \times n$,

λ - wartość własna,

x - wektor własny Collatz [2], Ade [1].

Przestrzeń X jest w tym przypadku przestrzenią Banacha z elementami

$$u = \binom{x}{\lambda},$$

gdzie

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

wektor a λ liczba.

Jako normę wektora bierzemy

$$\|u\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|, |\lambda|)$$

a jako odpowiadającą normę macierzy

$$\|M\| = \max_j \sum_k |a_{jk}|.$$

Szukany wektor własny "normujemy" kładąc $x_n = 1$.

Zadanie (2.3) możemy zapisać w postaci równania:

$$F(u) = F\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - \lambda Bx \\ x_n - 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Pochodne Frécheta operatora (2.4) znajduje się prosto, przy czym druga pochodna jest stała (Collatz [2]). Do znalezienia rozwiązania stosujemy metodę (1.4).

Niech $n = 3$ oraz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(Collatz [2]). Jako przybliżenie początkowe weźmy

$$u_1 = (0.35,\ -0.93,\ 1.0,\ 1.95)^T$$

oraz $\vartheta_1 = 0.0896$.

Rozwiązanie dokładne wynosi

$$u^* = \begin{pmatrix} 0.358960923456 \\ -0.926187771058 \\ 1.0 \\ 1.95136984124 \end{pmatrix}$$

Dalej mamy

$$\| u^* - u_1 \| = \max \begin{pmatrix} 0.001039076544 \\ 0.003812228942 \\ 0.0 \\ 0.00136984124 \end{pmatrix} = 0.003812228942$$

$$r_1 = 0.00401001019711$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0.358960922926 \\ -0.926187766192 \\ 1.0 \\ 1.9513698379 \end{pmatrix}$$

$$\| u^* - u_2 \| = \max \begin{pmatrix} 0.00000000053 \\ 0.00000000486 \\ 0.0 \\ 0.00000000334 \end{pmatrix} = 0.00000000486$$

$$r_2 = 0.000000004863.$$

Według Collatza [2]

$$\| u^* - u_2 \| \leqslant 0.00000004.$$

Widzimy, że oszacowanie Collatza jest dziesięciokrotnie większe w stosunku do błędu rzeczywistego i błędu wynikającego z zastosowania powyższej metody.

Niech $n = 2$ oraz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Ade [1])}.$$

Przybliżenie początkowe przyjmujemy

$$u_1 = \begin{pmatrix} -0.44 \\ 1.0 \\ 0.77 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_1 = 0.057.$$

Rozwiązanie dokładne

$$u^* = \begin{pmatrix} -0.434258545906 \\ 1.0 \\ 0.767591879243 \end{pmatrix}.$$

Dalej mamy

$$\|u^* - u_1\| = 0.005741454094$$

$$r_1 = 0.005906808733$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -0.4342586227 \\ 1.0 \\ 0.7675919560 \end{pmatrix}$$

$$\|u^* - u_2\| = 0.0000000768$$

$$r_2 = 0.0000000769.$$

Oszacowanie otrzymane przez Ade [1] wynosi

$$\|u^* - u_2\| \leq 6.6\ 10^{-7}$$

i jest o rząd gorsze w stosunku do oszacowania wynikającego z użytej metody.

c) Równanie przestępne w dziedzinie zespolonej

Będziemy poszukiwali rozwiązania równania

$$e^z - z - 1 = 0, \quad z = x + iy \quad \text{(Ehrmann [4])}. \tag{2.5}$$

Jako przybliżenie początkowe przyjmiemy

$$z_1 = 2.1 + i7.5 \quad \text{oraz} \quad \vartheta_1 = 0.06.$$

Niech

$$F(z) = e^z - z - 1.$$

W tym przypadku łatwo można obliczyć pochodne Frécheta dowolnego rzędu (Collatz [2]) operatora $F(z)$.

Za dokładne rozwiązanie przyjmiemy

$$z^* = 2.08884301557 + i7.46148928551.$$

Stosując metodę (1.4) otrzymujemy

$$\|z^* - z_1\| = 0.0400943067233$$

$$r_1 = 0.0410645369422$$

$$z_2 = 2.08884301569 + i7.46148928574$$

$$\|z^* - z_2\| = 0.00002341168$$

$$r_2 = 0.000023413379.$$

Stosując metodę (1.5) otrzymujemy

$$z_2 = 2.08884303111 + i7.4614882117$$

$$\|z^* - z_2\| = 0.000001073927389$$

$$r_2 = 0.0000010739979.$$

Oszacowań błędu otrzymanych przez Ehrmanna [4] nie można porównać z powyższymi, gdyż Ehrmann posługuje się oszacowaniem błędu a priori, które jest znacznie "gorsze" aniżeli oszacowanie a posteriori. Sposób otrzymania oszacowania a priori dla metod (1.4) i (1.5) podaje uwaga 3.3 w pracy [3].

d) Rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego

Będziemy poszukiwali rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \tag{2.6}$$

w przedziale $\langle 0, a \rangle$, ([7]).

Niech

$$F(y) = y'(x) - f(x,y). \tag{2.7}$$

Wtedy [6]

$$F'(y)\,\delta(x) = \delta'(x) - f'_y(x,y)\,\delta(x) \tag{2.8}$$

oraz

$$F''(y)\,\delta_1(x)\,\delta_2(x) = -f''_y(x,y)\,\delta_1(x)\,\delta_2(x) \tag{2.9}$$

$$F: X \to Y,$$

gdzie:

X - przestrzeń funkcji klasy C^1 na przedziale $\langle 0, a\rangle$,

Y - przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,a]$ (patrz [6]).

Kolejne przybliżenia będziemy wyznaczali z układu

$$\begin{aligned} F_n + F'_n\,\delta_1 &= 0, \\ F_n + F'_n\,\delta_2 + \frac{1}{2}F''_n\,\delta_1\,\delta_1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Stosujemy metodę (1.4). Jako przybliżenie początkowe przyjmujemy

$$y_1 = \frac{1}{3}x^3.$$

Wobec (2.8) i (2.10) mamy

$$\delta'_1(x) - \frac{2}{3}x^3\,\delta_1(x) = \frac{1}{9}x^6,$$

skąd

$$\delta_1(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{6}x^4}\int_0^x x^6 e^{-\frac{1}{6}x^4}\,dx.$$

Dalej

$$\delta'_2(x) - \frac{2}{3}x^3\,\delta_2(x) = \frac{1}{9}x^6 - \left(\frac{1}{9}e^{\frac{1}{6}x^4}\int_0^x x^6 e^{-\frac{1}{6}x^4}\,dx\right)^2,$$

$$\delta_2(x) = e^{\frac{1}{6}x^4}\int_0^x \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{1}{3969}x^{14} - \frac{4}{130977}x^{18}\right)e^{-\frac{1}{6}x^4}\,dx,$$

$$y_2(x) = \frac{1}{3} x^3 + \delta_2(x),$$

$$y_2(x) = \frac{1}{3} x^3 + e^{\frac{1}{6} x^4} \int_0^x \left(\frac{1}{9} x^6 - \frac{1}{3969} x^{14} - \frac{4}{130977} x^{18}\right) e^{-\frac{1}{6} x^4} dx.$$

Przykład ten pokazuje, w jaki sposób można stosować rozpatrywane metody do rozwiązywania zagadnień ciągłych, np. równania różniczkowego. Oszacowanie błędu można przeprowadzić przy konkretnej wartości liczbowej stałej a (patrz [6], [7]).

LITERATURA

[1] Ade H.: Iterationsverfahren hoher Ordnung in Banach Räumen. Numer. Math. 1969, 13.

[2] Collatz L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. 1964.

[3] Czopik J.: Przybliżone metody wyższych rzędów rozwiązywania równań operatorowych w przestrzeniach Banacha. Praca doktorska Uniwersytet Śląski.

[4] Ehrmann H.: Konstruktion und Durchfuhrung von Iterationsverfahren hoherer Ordnung. Arch. Rat. Mech. Anal., 4,1959.

[5] Kantorovitch L.V.: O metodie Niutona, Trud. MAT. Inst. IM. Stiklova 38, 1948.

[6] Kantorovitch L.V., Akilov G.P.: Funkcionalnii analiz. 1977.

[7] Michlin S.G., Smolicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, 1972.

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В данной статье описывается применение итерационных методов высших порядков сходимости для решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах.

Представлены решения четырех проблем: системы нелинейных уравнений, трансцендентного комплексного уравнения, отыскания собственных значений матрицы и нелинейного дифференциального уравнения.

Решения получены методами третьего или четвёртого порядка сходимости, которые являются частными случаями класса итерационных методов, исследованных в работе [3].

Полученные оценки апостериорной погрешности являются более точными чем известные до сих пор.

THE APPLICATION OF HIGHER ORDER ITERATIVE METHODS FOR THE SOLUTION OF OPERATOR EQUATIONS

S u m m a r y

This paper deals with the applications of higher order iterative methods for the solution of nonlinear operator equations in Banach spaces.

Using these methods the solution of the following problems are presented: system of nonlinear equations, transcedental equation in a complex domain, eigenvalues of a matrix and nonlinear differential equation.

The results were obtained with use of methods of third or fourth order, which are particular cases of the class of iterative methods which ware discussed in the paper [3]. The a posteriori error estimation obtained here, are much sharper then the known ones.