ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Bolesław P. WANTUŁA

O BŁĘDACH ZAOKRĄGLEŃ W PROCESACH ITERACYJNYCH

Streszczenie. W praktycznej realizacji procesu iteracyjnego dokonuje się systematycznych błędów zaokrągleń. Istotną rzeczą jest zbadanie wpływu tych błędów na zbieżność i rząd zbieżności tego procesu. W pracy wykazano, że działający w przestrzeni Banacha proces iteracyjny, w którym uwzględniane są błędy zaokrągleń, przy pewnych założeniach zachowuje zbieżność i rząd zbieżności.

Praca niniejsza dotyczy wpływu błędów zaokrągleń na zbieżność i rząd zbieżności procesów iteracyjnych w przestrzeniach Banacha. Praca ta jest próbą uogólnienia wyników A.M. Ostrowskiego, dotyczących tej problematyki dla metody Newtona na prostej. W praktycznej realizacji procesów iteracyjnych dokonuje się zazwyczaj systematycznych błędów zaokrągleń. Rzeczą istotną jest zadanie wpływu tych błędów na zbieżność procesu do rozwiązania i na rząd tej zbieżności. Może się okazać, że na skutek tych błędów rząd zbieżności znacznie zmaleje, a nawet sam proces przestanie być zbieżny do rozwiązania.

Zbadanie warunków pozwalających uniknąć tego typu sytuacji jest konieczne - w przeciwnym razie w praktycznej realizacji procesu iteracyjnego problem zbieżności i rzędu zbieżności pozostanie otwarty. Otwarty pozostanie również problem ilości kroków iteracji potrzebnych do uzyskania danej dokładności obliczeń i celowości zwiększania ilości tych kroków w celu poprawienia dokładności obliczeń.

Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś Φ operatorem nieliniowym, określonym w obszarze $D \subset X$ o wartościach z przestrzeni X. Rozważmy równanie:

$$x = \Phi(x), \tag{1}$$

posiadające pierwiastek $\xi \in D$. Załóżmy, że operator jest p-krotnie różniczkowalny w sensie Frecheta w kuli

$$K = \left\{ x \in X : |x - \xi| < \mu \right\}, \tag{2}$$

gdzie $\mu > 0$ jest pewną liczbą rzeczywistą oraz $K \subset D$, $p \in N$, $p \geq 2$. Rozpatrzmy następujący proces iteracyjny:

$$x_0 = x_0' \in K$$
$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad x_n' = x_n + \delta_n, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{3}$$

w którym są uwzględniane błędy zaokrągleń δ_n powstałe przy obliczaniu wartości operatora Φ.

Przy danych oznaczeniach wykażemy obecnie twierdzenie o zbieżności ciągów:

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots,$$
$$x_0', x_1', \ldots, x_n' \ldots, \tag{4}$$

określonych procesem (3) do pierwiastka ξ równania (1).

Twierdzenie

Niech operator Φ spełnia założenia:

1° $\Phi^{(k)}(\xi) = 0$ dla $k = 1,2,\ldots, p-1$,

2° istnieje stała $q \in R$ spełniająca nierówności:

3° $\frac{1}{p!}\left|\Phi^{(p)}(x)\right| < q$ dla $x \in K$,

4° $\mu^{p-1} q \leq L < 1$, $L \in R$.

Jeżeli

5° $|\delta_n| \leq \mu L^{\frac{p^n-1}{p-1}} (1 - \frac{1}{r})$ dla $n = 1,2\ldots$, gdzie $r = \frac{L}{\mu^{p-1} q}$

to ciągi (4) są określone (tzn. $x_k, x_k' \in K$, dla $k \in N$) i zbieżne do jedynego w kuli K pierwiastka ξ równania (1). Nadto zachodzą nierówności:

6° $|x_n' - \xi| < \mu L^{\frac{p^n-1}{p-1}}$, $n = 1,2,\ldots$,

7° $|x_n - \xi| < \mu L^{\frac{p^n-1}{p-1}} \frac{1}{r}$, $n = 1,2,\ldots$,

z których wynika, że rząd zbieżności ciągów (4) jest równy co najmniej p.

UWAGA

Przyjmując $r = 1$ mamy na podstawie 5° $\delta_n = 0$, dla $n=0,1,2,\ldots$. W tym przypadku twierdzenie sprowadza się do znanego twierdzenia o zbieżności ciągu iteracji.

Dowód twierdzenia

Jeżeli $x, y \in K$, to na podstawie wzoru Taylora i założenia 2° otrzymujemy nierówność:

$$8^o \quad \left|\Phi(x) - \Phi(y) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(y)(x-y)^k\right| \leq q|x-y|^p,$$

gdzie $\Phi^{(k)}(y)(x-y)^k = \Phi^{(k)}(y)(x-y,\ldots,x-y)$ jest dla ustalonej wartości y operatorem k-liniowym. Podstawiając w 8° $y = \xi$ i uwzględniając założenie 1°, otrzymujemy:

$$9^o \quad |\Phi(x) - \xi| \leq q|x - \xi|^p, \quad \text{dla} \quad x \in K.$$

Wykażemy, że równanie (1) posiada w kuli K jeden dokładnie pierwiastek ξ. Niech $\xi_1 \in K$ i $\xi_1 = \Phi(\xi_1)$. Podstawiając w 9° $x = \xi_1$ mamy:

$$10^o \quad |\xi_1 - \xi| \leq q\mu^{p-1} |\xi_1 - \xi|.$$

Z 10° wobec założenia 4° wnioskujemy, że $|\xi_1 - \xi| = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi$. Jeżeli są spełnione nierówności 6° i 7°, to wobec 4° ciągi (4) są określone, tzn. $x_k, x'_k \in K$, dla $k = 0,1,\ldots$, nadto wynika również zbieżność ciągów (4).

Z ciągłości operatora Φ i jednoznaczności pierwiastka ξ równania (1) w kuli K wnioskujemy, że ciągi (4) są zbieżne do pierwiastka ξ.

Nierówności 6° i 7° wykażemy indukcyjnie. Na podstawie 9° i $r = \frac{L}{\mu^{p-1} q}$ otrzymujemy:

$$|x_1 - \xi| = |\Phi(x'_0) - \Phi(\xi)| \leq q|x_0 - \xi|^p < q\,\mu^p = \frac{L\mu}{r},$$

$$|x'_1 - \xi| = |x_1 - \xi + \delta_1| \leq |x_1 - \xi| + |\delta_1| < \frac{L\mu}{r} + L\,\mu\left(1 - \frac{1}{r}\right) = L\mu,$$

a więc nierówności 6°, 7° są spełnione dla $n = 1$. Na podstawie 6° i 7° z 9° i 5° mamy:

$$|x_{n+1} - \xi| = |\Phi(x'_n) - \Phi(\xi)| \leq q\,|x'_n - \xi|^p <$$

$$< q\left(\mu L^{\frac{p^n-1}{p-1}}\right)^p = \mu L^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}} \cdot \frac{1}{r},$$

$$|x'_{n+1} - \xi| = |x_{n+2} - \xi + \delta_{n+1}| \leq |x_{n+1} - \xi| + |\delta_{n+1}| <$$

$$< \mu L^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}} \frac{1}{r} + \mu L^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}} (1 - \frac{1}{r}) = \mu . L^{\frac{p^{n+1}-1}{p-1}},$$

co kończy dowód przejścia indukcyjnego.

О ПОГРЕШНОСТИ ОКРУГЛЕНИЯ В ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

Р е з ю м е

Во время реализации итерационного процесса систематически накапливается погрешность окреглення. Естественным кажется изучение влияния этой погрешности на сходимость, и порядок сходимости итерационного процесса. В этой работе доказывается, что действующий в банаховом пространстве итерационный процесс, в котором учитывается погрешность округления, при некоторых условиях, сохраняет сходимость и порядок сходимости.

ON CALCULATION ERRORS IN ITERATION PROCESSES

S u m m a r y

During realisation of iteration processes we systematically do calculation errors. It is essential to know how these errors influence on convergence and rank of convergence of these processes. In this paper is proved, that iteration process in Banach space, in which calculation errors are involved, is - under certain conditions - keeping convergence and rank of convergence.