ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Franciszek PRZYBYLAK

UOGÓLNIONA JEDNOWYMIAROWA FUNKCJA PLECAKOWA

Streszczenie. W oparciu o zasadę optymalności Bellmana [1] podano algorytm wyznaczania optymalnych podziałów odcinka na odcinki o długościach z zadanego zbioru, przy czym każdy odcinek ma przyporządkowane wartości, które są zależne od położenia tego odcinka na odcinku dzielonym. Optymalizacja jest dokonywana ze względu na wartość, jaką możemy uzyskać z danego odcinka. Pewne rozważania związane z tematem tego artykułu można znaleźć w pracach [2] i [3].

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważania związane z tytułem tego paragrafu poprzedzimy podaniem praktycznej interpretacji omawianego we wstępie zagadnienia optymalizacji.

Dany jest pręt o długości $u (u \in N)$. Na podstawie badania defektoskopowego wyznaczamy dla $0 \leq x \leq u$ funkcję wadliwości $W(x)$ dla danego pręta, przy czym $0 \leq W(x) \leq 1$, gdzie $x = 0,1,2,\ldots,u-1$. Pręt ten należy podzielić na pręty o długościach handlowych ze zbioru $\{T_1, T_2, \ldots, T_M\}$, o których zakładamy, że są dane ich wartości $P_i(x)$ dla $i = 1(1)M$ oraz $x = 0(1)u$. Wartości te uwzględniają wadliwość odcinka $(x, x + T_i)$. Podział ma być taki, aby z danego pręta uzyskać największą wartość.

Zauważmy, że z takim samym zagadnieniem spotykamy się przy podziale jednowymiarowym pasma pewnego materiału (blachy, tkaniny, szkła itp.).

Przejdziemy teraz do ścisłego sformułowania zagadnienia.

Dany jest przedział

$$I = \langle s, s+x \rangle,$$

gdzie $s+x \leq u$, $s, x \in N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$.

Niech będzie dany wektor

$$T = [T_1, T_2, \ldots, T_M] \tag{1}$$

o współrzędnych całkowitych dodatnich taki, że

$$T_i \neq T_j \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad i,j = 1(1)M.$$

Nadto dany jest wektor wartości

$$P(x) = [P_1(x), P_2(x), \ldots, P_M(x)] \tag{2}$$

określony dla $x = 0(1)u$, przy czym $P_i(x) = 0$ dla $x > u - T_i$, $i = 1(1)M$.

Funkcje

$$P_k(t), \quad k = 1(1)M \tag{3}$$

o wartościach całkowitych określają wartości odcinków o długościach należących do zbioru

$$Z = \left\{T_k: \quad k = 1(1)M\right\} \tag{4}$$

w zależności od jego położenia na odcinku I (położenie odcinka określa współrzędna t jego lewego końca).

Z odcinka I należy tak wyciąć odcinki o wymiarach należących do zbioru Z, by suma ich wartości była największa. Sformułujemy to dokładnie. Przedział I dzielimy punktami o współrzędnych całkowitych

$$s + x > x_0 > x_1 > \ldots > x_n = s, \quad n \in N \tag{5}$$

na odcinki

$$\langle x_{i+1}, x_i \rangle, \quad i = 0(1)n-1.$$

Niech

$$P(d,x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad d \notin Z, \\ P_k(x) & \text{dla} \quad d = T_k. \end{cases}$$

Wartość odcinka I przy jego podziale (5) (uwzględniamy tylko wymiary handlowe) wynosi

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i - x_{i+1}, x_{i+1}). \tag{6}$$

Definicja 1

Uogólnioną jednowymiarową funkcję plecakową nazywamy funkcję

$$W(s,x) = \max\left\{\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i - x_{i+1}, x_{i+1}): s + x > x_0 > x_1 > \ldots > x_n = s\right\}. \tag{7}$$

Funkcję (7), określoną przez wektory (1) i (2), będziemy również oznaczać

$$GKF(s,x;\ T,\ P(x)), \tag{8}$$

(GKF - Generalized Knapsack Function).

Dziedziną funkcji (7) jest zbiór punktów o współrzędnych całkowitych obszaru określonego nierównościami

$$\sigma = \begin{cases} 0 \leqslant s \leqslant u, \\ 0 \leqslant x \leqslant u-s. \end{cases}$$

UWAGA 1

W przypadku, gdy

$$P_k(t) = P_k, \quad k = 1(1)M \tag{9}$$

(tzn. funkcje (3) są stałe ze względu na zmienną t) uogólniona jednowymiarowa funkcja plecakowa sprowadza się do jednowymiarowej funkcji plecakowej [4].

2. ALGORYTM WYZNACZANIA WARTOŚCI UOGÓLNIONEJ JEDNOWYMIAROWEJ FUNKCJI PLECAKOWEJ

Podział (5) odcinka I, dla którego wartość (6) jest równa $W(s,x)$, nazywamy podziałem optymalnym odcinka I.

Zauważmy, że jeżeli

$$T_i < T_j \quad \text{i} \quad P_i(x) > P_j(x) \quad \text{dla} \quad x = 0(1)u,$$

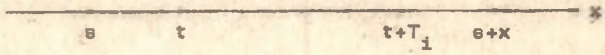
to istnieją podziały optymalne odcinka I, które nie zawierają odcinków o długości T_j. W związku z tym z wektorów (1) i (2) usuwamy odpowiednie współrzędne T_j i $P_j(x)$.

Postępując w ten sposób otrzymujemy uogólnione zagadnienie plecakowe, spełniające warunki

$$(T_i < T_j) \Longrightarrow \bigvee_{0 \leqslant x \leqslant u} P_i(x) < P_j(x), \quad i,j = 1(1)M. \tag{10}$$

Obliczenie wartości funkcji (7) w obszarze wykonujemy, gdy wektory (1) i (2) doprowadzimy do postaci spełniającej warunek (10).

Wyznaczymy najpierw największą wartość, jaką można uzyskać z odcinka $I = \langle s, s+x \rangle$, wycinając z niego co najwyżej jeden wymiar handlowy (rys.1). Wartość tę oznaczymy przez $W(s,x)$.



Rys. 1

Łatwo zauważyć, że

$$W_0(s,x) = \max\left\{0, P_i(t): s \leq t,\ t + T_i \leq s + x\right\}, \tag{11}$$

nadto

$$W(s,x) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq T_0 - 1, \quad s = 0(1)u, \tag{12}$$

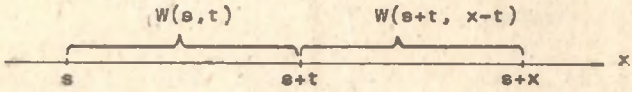
gdzie

$$T_0 = \min\left\{T_i: i = 1(1)M\right\}.$$

Zgodnie z zasadą optymalności Bellmana funkcja $W(s,x)$ spełnia równanie funkcyjne

$$W(s,x) = \max\left\{W(s,t) + W(s+t,x-t): 0 \leq t \leq x\right\}, \tag{13}$$

co objaśnia rys. 2.



Rys. 2

Równanie (13) można zmodyfikować, wykluczając z niego trywialne rozbicia odcinka I, tzn. sumy

$$W(s,0) + W(s,x), \quad W(s,x) + W(x,0)$$

oraz wprowadzając funkcję $W_0(s,x)$.

Zmodyfikowane równanie (13) przyjmuje postać

$$W(s,x) = \max\left\{W_0(s,x),\ W(s,t) + W(s+t,x-t): 0 \leq t \leq x\right\}. \tag{14}$$

Na podstawie (11), (12) i (14) możemy stablicować funkcję $W(s,x)$ w obszarze

$$G = \begin{cases} 0 \leq s \leq u, \\ 0 \leq x \leq u-s, \end{cases}$$

jak niżej:

1° na podstawie (12) wypełniamy zerami tę część obszaru $\mathcal{G}$, dla której $0 \leq x \leq T_0 - 1$,

2° pozostałą część tablicy wypełniamy wartościami $W_0(s,x)$, które łatwo wyznaczyć z równania (11),

3° następnie korzystając z (14) wypełniamy ponownie tę część tablicy, dla której $x \geq T_0$, wyznaczając kolejno wiersze dla

$$s = u - T_0,\ u - T_0 - 1, \ldots 0.$$

Dokładniej pokazano to na przykładzie umieszczonym na końcu pracy.

3. WYZNACZANIE ZBIORU OPTYMALNYCH PODZIAŁÓW ODCINKA <0,u>

Optymalnym podziałem odcinka $<0,u>$ nazywamy taki podział

$$u > x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1} > x_n = 0,$$

dla którego suma (6) jest równa $W(0,u)$.

Podamy sposób wyznaczania ciągów

$$u > u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_{2k-2} > u_{2k-1} > u_{2k} = 0, \tag{15}$$

na podstawie których uzyskamy optymalne ciągi podziałów przedziału $I = <0,u>$.

Element u_0 ciągu (15) wyznaczamy z warunku

$$u_0 = \min\left\{x:\ W(0,x) = W(0,u)\right\},$$

następnie wyznaczamy wszystkie wartości i $(i = 1(1)M)$, dla których jest spełnione równanie

$$W(0,u_0) = W(0,u_0 - T_i) + W(u_0 - T_i, T_i). \tag{16}$$

Przyjmując ustaloną wartość i spełniającą równanie (16) otrzymujemy

$$u_1 = u_0 - T_i.$$

Dalsze postępowanie jest rekurencyjne.

Mając daną wartość u_{2m-1} wyznaczamy u_{2m} z warunku

$$u_{2m} = \min\left\{x:\ W(0,x) = W(0,u_{2m-1})\right\},$$

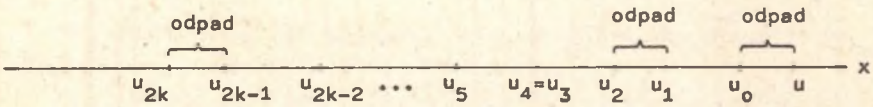
a następnie

$$u_{2m+1} = u_{2m} - T_i,$$

gdzie dla i jest spełniony warunek

$$W(0,u_{2m}) = W(0,u_{2m} - T_i) + W(u_{2m} - T_i,T_i).$$

Jeżeli któryś z wyrazów tak konstruowanego ciągu przyjmie wartość 0, to na nim kończymy wyznaczanie rozwiązania optymalnego. Przedstawione wyżej postępowanie zilustrowano na rys. 3.



Rys. 3

Wybierając z ciągu (15) maksymalny podciąg ściśle monotoniczny otrzymujemy optymalny podział odcinka $I = \langle 0,u \rangle$.
Z rysunku 3 wynika, że jeżeli $u - u_0 > 0$, lub $u_{2m-1} - u_{2m} > 0$ dla pewnego m, to przy podziale określonym przez ciąg (15) występuje odcinek $\langle u_0,u \rangle$ lub $\langle u_{2m},u_{2m-1} \rangle$ będący odpadem.

Podamy obecnie przykład wyznaczania optymalnego jednowymiarowego podziału pasma blachy za pomocą uogólnionej jednowymiarowej funkcji plecakowej.

PRZYKŁAD

Dany jest pręt o długości $u = 8$, w którym znajdują się wady. Pręt ten należy podzielić na pręty o długościach określonych przez wektor $T = [2,3,5]$. Odpowiadający mu wektor wartości tych odcinków bez wad ma postać $P = [70,90,120]$. Funkcja wadliwości $W(x)$ dla $x = 0(1)7$ podana jest w tabeli 1.

Tabela 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7
W(x)	1	9/10	0	1	1	1	9/10	9/10

Współrzędne wektora wartości $P(x) = [P_1(x), P_2(x), P_3(x)]$ uwzględniającego położenie odcinka i wadliwość pręta można dla przykładu obliczyć ze wzoru

$$P_k(x) = \begin{cases} P_k \max\left\{0, \left(1 - \sum_{j=x}^{x+T_k} (1 - W(j))\right)\right\} & \text{dla} \quad x \leq u - T_k, \\ 0 & \text{dla} \quad x > u - T_k, \end{cases}$$

gdzie $k = 1,2,3$.
Wartości te przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_1(x)$	63	0	0	70	70	63	56	0	0
$P_2(x)$	0	0	0	90	81	72	0	0	0
$P_3(x)$	0	0	0	120	0	0	0	0	0

Za pomocą wzorów (11) i (14) tablicujemy wartości funkcji $W(s,x)$, które przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3

	8	0							
	7	0	0						
$u-T_o$	6	0	0	56					
	5	0	0	63	72				
	4	0	0	70	81	126			
	3	0	0	70	90	133	146		
	2	0	0	0	70	90	133	146	
	1	0	0	0	0	70	90	133	146
	0	0	0	63	63	63	133	153	196	209
s/x		0	1	2	3	4	5	6	7	8
				T_o						

Optymalna wartość $W(0,8) = 209$.
Ciąg (15) dla naszego przykładu ma postać

$$0 < 2 < 3 < 6 < 8.$$

Stąd wynika, że przedział $\langle 2,3 \rangle$ stanowi odpad, gdyż nie ma pręta o takiej długości.

Powyższy przykład był przeliczony także na maszynie cyfrowej i otrzymano zgodność wyników.

LITERATURA

[1] Praca zbiorowa pod red. Beckenbacha E.F.: Nowoczesna matematyka dla inżynierów. PWN, Warszawa 1962.

[2] Gilmore P.C., Gomory R.E.: Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. Opns. Res. 13, 94-120 (1965).

[3] Hahn Susan G.: On the Optimal Cutting of Defective sheets. Opns. Res. 16, 1100-1114 (1968).

[4] Przybylak F.E.: Obliczanie jednowymiarowej funkcji plecakowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 35 (1979).

ОБОБЩЁННАЯ ОДНОМЕРНАЯ РЮКЗАКОВАЯ ФУНКЦИЯ

Р е з ю м е

На основании принципа оптимальности Беллмана в работе даётся алгоритм определения оптимальных делений отрезка на отрезки длиной из заданного множества, причём каждому отрезку сопоставляются значения, зависящие от положения этого отрезка на данном отрезке (разделяемом). Оптимализируется значение, которое возможно получить из данного отрезка.

THE GENERALIZED ONE - DIMENSIONAL KNAPSACK FUNCTION

S u m m a r y

On Bellman's rule of optimality there is given the algorithm of construction of optimal divisions of interval into intervals with lengths from a given set. These intervals depend on their situation in the given interval (devided). Optimality is taken into account on value which can be obtained from given interval.