Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Franciszek PRZYBYLAK

OBLICZANIE JEDNOWYMIAROWEJ FUNKCJI PLECAKOWEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób obliczania jednowymiarowej funkcji plecakowej stosując metodę kolejnych przybliżeń do równania wynikającego z zasady optymalności Bellmana [1]. W konsekwencji otrzymano jeszcze jeden algorytm tablicowania jednowymiarowej funkcji plecakowej różny od algorytmów podanych w [2] i [3].

1. DEFINICJA JEDNOWYMIAROWEJ FUNKCJI PLECAKOWEJ

Jednowymiarową funkcję plecakową zdefiniujemy nieco ogólniej niż podaje się w literaturze.

Oznaczmy przez K zbiór wszystkich wektorów przestrzeni R^M (M - ustalona liczba naturalna) o współrzędnych całkowitych nieujemnych.

Definicja 1

Dla ustalonych wektorów

$$T = [T_1, T_2, \ldots, T_M], \qquad P = [P_1, P_2, \ldots, P_M], \tag{1}$$

należących do zbioru K i spełniających warunek

$$T_i > 0, \quad T_i \neq T_j \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad i,j = 1(1)M$$

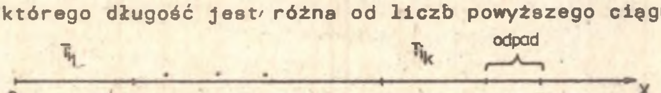
określamy następująco jednowymiarową funkcję plecakową

$$KF(x; T,P) = \max\{PY: TY \leq x,\ Y \in K\} \tag{2}$$

dla $x \in N_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ (KF - Knapsack Function). ▭

Podamy interpretację geometryczną jednowymiarowej funkcji plecakowej.

Dany jest odcinek o długości x, który należy podzielić na odcinki o długościach T_i, $i = 1(1)M$, przy czym może wystąpić odpad, tzn. taki odcinek, którego długość jest różna od liczb powyższego ciągu (rys. 1).



Rys. 1

Zakładamy, że odcinek o długości T_i ma wartość P_i. Wtedy $KF(x;\ T,P)$ oznacza maksymalną wartość, jaką można uzyskać z odcinka o długości x - przy jego podziale na odcinki o długościach T_i, $i = 1(1)M$.

Przeprowadzimy obecnie pewną modyfikację wektorów T i P występujących w funkcji KF. Modyfikacja ta nie wpływa na wartości funkcji KF, ale na ogół powoduje zmniejszenie wymiaru M wektorów T i P.

Jeżeli $P_i = 0$ dla $i = 1(1)M$, to łatwo zauważyć, że $KF(x;\ T,P) \equiv 0$, $x \in N_0$. Załóżmy więc, że $P \neq 0$.

Niech

$$i_1, i_2, \ldots, i_M \tag{3}$$

będzie taką permutacją ciągu $1, 2, \ldots, M$, że

$$0 < T_{i_1} < T_{i_2} < \ldots < T_{i_M},$$

zaś przez

$$i_{s_1}, i_{s_2}, \ldots, i_{s_m},$$

oznaczmy maksymalny podciąg ciągu (3), spełniający warunki

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_{i_{s_1}-1} = 0 \quad \text{i} \quad P_{i_{s_1}} > 0,$$

$$P_{i_{s_k}} < P_{i_{s_{k+1}}} \qquad \text{dla} \quad k = 1(1)(m-1).$$

Dla wektorów

$$T^* = \left[T_{i_{s_1}}, T_{i_{s_2}}, \ldots, T_{i_{s_m}}\right],$$

$$P^* = \left[P_{i_{s_1}}, P_{i_{s_2}}, \ldots, P_{i_{s_m}}\right],$$

jest

$$KF(x;\ T,P) = KF(x;\ T^*,P^*),\ x \in N_0.$$

Wynika to stąd, że odcinki o długościach T_α, dla których $\alpha \neq i_{s_k}$, $k=1(1)m$ nie wejdą do podziału odcinka realizującego maksymalną wartość podziału (tzn. wartość funkcji $KF(x;\ T,P)$, gdyż mogą istnieć odcinki o mniejszej długości, których wartość jest większa od P_α.

Zmodyfikowane wektory

$$T^* = [t_1, t_2, \dots, t_n],$$
$$P^* = [p_1, p_2, \dots, p_n],$$

spełniają warunki

$$t_i > 0,\ t_o \neq t_j \quad \text{dla} \quad i \neq j,\ i,j = 1(1)m,$$
$$p_i > 0,\ t_i > t_j \Longrightarrow p_i > p_j, \quad i,j = 1(1)m. \tag{4}$$

Algorytm tablicowania jednowymiarowej funkcji plecakowej KF można więc rozpatrywać przy założeniu, że

$$T = T^* \quad i \quad P = P^*.$$

Ponieważ w dalszych rozważaniach tego paragrafu wektory T i P są ustalone, więc funkcję KF(x; T,P) oznaczać będziemy przez F(x).

2. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI JEDNOWYMIAROWEJ FUNKCJI PLECAKOWEJ

Twierdzenie 1

Funkcja F(x) jest niemalejąca i

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty. \tag{5}$$

Dowód

Pierwsza część tezy jest oczywista. Druga część tezy wynika z tego, że

$$F(x) \geq \left[\frac{x}{T_i}\right] P_i, \quad i = 1(1)M.$$

Twierdzenie 2

Funkcję plecakową F(x) określa dyskretne równanie funkcyjne

$$F(x) = \max\left\{0, F(x-T_i) + P_i \colon T_i \leq x\right\}, \quad x \in N_o. \tag{6}$$

Równanie to dla ustalonych wektorów (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie F(x).

Dowód

Niech

$$T_m = \min\left\{T_i : i = 1(1)M\right\}. \tag{7}$$

wtedy równanie (6) można zapisać

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < T_0, \\ \max\left\{F(x-T_i) + P_i : T_i \leqslant x\right\} & \text{dla} \quad x \geqslant T_0. \end{cases} \tag{8}$$

Wykażemy, że funkcja (2) spełnia równanie (8). Biorąc pod uwagę (7) łatwo stwierdzić, że funkcja (2) spełnia pierwszą część równania (8). Dla $x \geqslant T_0$ mamy

$$F(x) \geqslant \min\left\{P_1, P_2, \ldots, P_M\right\} > 0,$$

a zatem istnieje wektor

$$\bar{Y} = \left[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_M\right] \in K,$$

taki, że

$$\bar{Y} \neq \left[0, 0, \ldots, 0\right] \quad \text{i} \quad F(x) = P\bar{Y}.$$

Jeżeli y_s jest niezerową współrzędną wektora $\bar{Y}$, to zgodnie z zasadą optymalności Bellmana (por. interpretację geometryczną jednowymiarowej funkcji plecakowej) mamy

$$F(x) = F(x-T_s) + P_s.$$

stąd już wynika, że funkcja (2) spełnia drugą część równania (8).□

Równanie (6) posiada jednoznaczne rozwiązanie, gdyż wartości funkcji $F(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$ $(\bar{x} \in N_0)$ określają jednoznacznie wartości $F(\bar{x} + 1)$, ponieważ $T_i \geqslant 1$ dla $i = 1(1)M$ oraz $F(0) = 0$.□□

Definicja 2

Ciąg funkcji

$$F_0(x) = 0,$$
$$F_{k+1}(x) = \max\left\{F_k(x), F_k(x-T_i) + P_i : T_i \leqslant x\right\}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{9}$$

określony dla $x \in N_0$, nazywamy ciągiem kolejnych przybliżeń dla równania (6).□

Zauważmy, że funkcje (9) są ograniczone, gdyż

$$0 \leqslant F_k(x) \leqslant k.\max\left\{P_i : i = 1(1)M\right\}. \tag{10}$$

Twierdzenie 3

Dla $x \in N_0$ ciąg (9) spełnia warunki

$$F_k(x) \leqslant F_{k+1}(x), \tag{11}$$

$$F_k(x) \leqslant F(x), \quad k = 0,1,\ldots \tag{12}$$

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(x) = F(x). \tag{13}$$

Oprócz tego funkcje ciągu (9) są funkcjami niemalejącymi zmiennej $x \in N_0$.

Dowód

Nierówność (11) wynika bezpośrednio z (9). Nierówność (12) wykażemy indukcyjnie. Dla $k = 0$ wynika ona z (9) ($F_0(x) \equiv 0 \leqslant F(x)$). Zakładając prawdziwość nierówności (12), na podstawie (9) i twierdzenia 2 mamy

$$F_{k+1}(x) \leqslant \max\left\{F(x),\ F(x-T_i) + P_i\ :\ T_i \leqslant x\right\} = F(x).$$

Aby wykazać (13) zauważmy, że z (11) i (12) wynika

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(x) = F(x), \qquad F^*(x) \leqslant F(x),\ x \in N_0. \tag{14}$$

Oprócz tego z (9) otrzymujemy

$$F_{k+1}(x) \geqslant F_k(x-T_i) + P_i, \quad T_i \leqslant x, \quad x \in N_0,$$

skąd po przejściu do granicy $(k \to \infty)$ mamy

$$F^*(x) \geqslant F^*(x-T_i) + P_i, \quad T_i \leqslant x, \quad x \in N_0. \tag{15}$$

Korzystając z nierówności (15) wykażemy metodą indukcji względem x, że dla $x \in N_0$

$$F^*(x) = F(x).$$

Dla $0 \leqslant x < T_0$ (por. (7)) na podstawie (9) jest

$$F(x) = F^*(x) \equiv 0.$$

Załóżmy, że dla $0 \leqslant x < \bar{x}$, $\bar{x} \geqslant T_0$ jest $F(x) = F^*(x)$. Na podstawie tego założenia (gdyż $F^*(\bar{x} - T_i) = F(\bar{x} - T_i)$) nierówność (15) dla $x = \bar{x}$ przyjmie postać

$$F^*(\bar{x}) \geqslant F(\bar{x} - T_i) + P_i, \quad T_i \leqslant \bar{x}.$$

Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdej wartości i, przy której $T_i \leqslant \bar{x}$, więc także dla tej, dla której

$$F(\bar{x}) = \max\left\{F(\bar{x} - T_i) + P_i : T_i \leqslant \bar{x}\right\},$$

(twierdzenie 2), zatem

$$F^*(\bar{x}) \geqslant F(\bar{x}).$$

Biorąc pod uwagę (14) mamy

$$F^*(\bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Aby zakończyć dowód twierdzenia 3 należy jeszcze wykazać, że funkcje ciągu (9) są niemalejące. Funkcja $F_0(x) \equiv 0$ jest niemalejąca. Załóżmy, że $F_k(x)$ jest funkcją niemalejącą zmiennej x. Z założenia tego i (9) wynika, że

$$F_{k+1}(x+1) = \max\left\{F_k(x+1),\ F_k(x+1-T_i) + P_i : T_i \leqslant x+1\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\left\{F_k(x),\ F_k(x-T_i) + P_i : T_i \leqslant x\right\} = F_{k+1}(x).$$

Lemat 1

Jeżeli dla pewnej liczby naturalnej s istnieje taka liczba $\bar{x}$, że

$$F_{s-1}(x) = F_s(x), \quad 0 \leqslant x < \bar{x};$$
$$F_{s-1}(\bar{x}) < F_s(\bar{x}) \tag{16}$$

to dla $0 \leqslant x < \bar{x}$ jest

$$F(x) = F_{s-1}(x) \tag{17}$$

oraz

$$F(\bar{x}) = F_s(\bar{x}). \tag{18}$$

Dowód

Z (9) na podstawie (16) wynika, że dla $0 \leqslant x < \bar{x}$

$$F_{s-1}(x) = F_s(x) = \ldots$$

Stąd na mocy twierdzenia 3 wnioskujemy, że dla $0 \leqslant x < \bar{x}$

$$F(x) = \lim_{k \to \infty} F_k(x) = F_{s-1}(x).$$

Zauważmy dalej, że

$$F_s(\bar{x}) = \max\left\{F_{s-1}(\bar{x}),\ F_{s-1}(\bar{x} - T_i) + P_i : T_i \leqslant \bar{x}\right\} =$$

$$= \max\left\{F_{s-1}(\bar{x} - T_i) + P_i : T_i \leqslant \bar{x}\right\} =$$

$$= \max\left\{F(\bar{x} - T_i) + P_i : T_i \leqslant \bar{x}\right\} = F(\bar{x}),$$

czyli

$$F(\bar{x}) = F_s(\bar{x}). \ \Box$$

Definicja 3

Określamy ciąg (x_k) postaci

$$x_o = 0,$$
$$x_{k+1} = \min\left\{x : F_{k+1}(x) > F_k(x)\right\}, \tag{19}$$

$k = 0,1,\ldots$. $\Box$

Zachodzi

Twierdzenie 4

Ciąg (19) jest rosnący, tzn.

$$x_k < x_{k+1} \tag{20}$$

oraz

$$F(x) = F_k(x) \tag{21}$$

dla $0 \leqslant x < x_{k+1}$.

Dowód

Łatwo stwierdzić prawdziwość twierdzenia dla $k = 0$. Z (19) wynika, że dla $x < x_{k+1}$ jest $F_{k+1}(x) = F_k(x)$. Załóżmy, że zachodzi (20) i (21). Z lematu 1, twierdzenia 3 i powyższego założenia mamy dla $0 \leqslant x < x_{k+1}$

$$F(x) = F_{k+1}(x) = F_{k+2}(x) = \ldots$$

Gdyby $F_{k+1}(x) = F_{k+2}(x)$ dla wszystkich $x \in N_o$, to także (tw. 3)

$$F(x) = F_{k+1}(x)$$

dla wszystkich $x \in N_0$, co jest sprzeczne z (5) i (10). Musi więc istnieć taka liczba $x_{k+2} > x_{k+1}$, że

$$F_{k+1}(x) = F_{k+2}(x) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x < x_{k+2}$$

oraz

$$F_{k+1}(x_{k+2}) < F_{k+2}(x_{k+2}).$$

Stąd na mocy lematu 1 wnioskujemy o prawdziwości przejścia indukcyjnego. $\square$

UWAGA

Ciąg (9) nie zmieni swoich własności, jeżeli za $F_0(x)$ przyjmiemy dowolną funkcję niemalejącą $G(x) \leqslant F(x)$ dla $x \in N_0$. Funkcja $G(x)$ może być określona następująco [4]:

$$G(x) = P \quad Y(x),$$

gdzie

$$Y(x) = \left\{ \left[\frac{x}{T_1}\right], \quad \left[\frac{x - x_1 T_1}{T_2}\right], \ldots, \left[\frac{x - \sum_{i=1}^{M-1} x_i T_i}{T_M}\right] \right\},$$

przy czym

$$x_k = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{T_1}\right] & k = 1 \\ \left[\dfrac{x - \sum_{i=1}^{k-1} x_i T_i}{T_k}\right] & k = 2, \ldots, M \end{cases}$$

oraz

$$\frac{P_1}{T_1} \geqslant \frac{P_2}{T_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{P_M}{T_M}. \square$$

<u>Przykład 1</u>

Wyznaczmy jednowymiarową funkcję plecakową dla $0 \leqslant x \leqslant 8$, jeśli

$$T = [2,3,5],$$
$$P = [7,9,15].$$

Korzystając z ciągu funkcyjnego (9) wyznaczmy tabelę 1.

Tabela 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_0(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_1(x)$	0	0	7	9	9	15	15	15	15
$F_2(x)$	0	0	7	9	14	16	18	22	24
$F_3(x)$	0	0	7	9	14	16	21	23	28
$F_4(x)$	0	0	7	9	14	16	21	23	28

Widzimy, że $F(x) = F_3(x)$ oraz że ciąg (19) tworzą liczby $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ $x_2 = 4$, $x_3 = 6$. $\square$

Mając obliczone wartości funkcji $F(x)$ dla $x = 0,1, \ldots, u$, możemy uzyskać wszystkie optymalne podziały odcinka o długości u. Metoda wyznaczania współrzędnych u_i $(i = 0,1, \ldots, k)$ punktów podziału przedziału $\langle 0,u\rangle$ polega na kolejnym rozwiązywaniu za pomocą tablicy wartości funkcji $F(x)$ równania postaci

$$F(u_i) = F(u_i - \vartheta_{i+1} T_{i+1}) + \vartheta_{i+1} P_{i+1},$$

$$u_0 = \min\left\{x : F(x) = F(u)\right\},$$

$i = 0,1,2, \ldots, k$, gdzie niewiadomą jest ϑ_{i+1}.

LITERATURA

[1] Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Praca zbiorowa pod redakcję Beckenbacha E.F.: PWN, Warszawa 1962, s. 327.

[2] Gilmore P.C., Gomory R.F.: The Theory and Computation of Knapsack Functions. Opns. Res. 14, 1045-1074 (1966).

[3] Garfinkol R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978.

[4] Magazine M.J., Nemhauser G.L., Trotter L.E.: When the Greedy Solution Solves a Class of Knapsack Problems. Opns. Ros. 23, 207-217 (1975).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ РЮКЗАКОВОЙ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В работе, на основании принципа оптимальности Беллмана, строится последовательность очередных приближений, для которой доказывается сходимость к одномерной рюкзаковой функции. Кроме того, даётся метод получения оптимальных делений реализирующих данное значение рюкзаковой функции.

THE CALCULATION OF ONE - DIMENSIONAL KNAPSACK FUNCTION

S u m m a r y

The paper contains the construction of sequence of succesive approximation by Bellman's rule of optimality. It is proved that this sequence is convergent to one - dimensional knapsack function. There is also the method of construction of optimal divisions which realize the given value of knapsack function.