ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Marian PALEJ

# PRZYCZYNEK DO ANALIZY WŁASNOŚCI PĘKU OKRĘGÓW

Streszczenie. W artykule uzupełniającym pracę Autora [1] sformułowano 5 twierdzeń ujmujących dalsze własności pęku okręgów oraz ich interpretację przestrzenną.

W szczególności dowiedziono, że:

1) bieguny prostej przechodzącej przez jeden podstawowy punkt pęku leżą na stożkowej,
2) styczne do okręgów pęku w punktach przecięcia ich prostą przynależną do jednego punktu podstawowego tworzą stożkową,
3) sfery pęku o okręgu podstawowym $\Omega$ wycinają na prostych przechodzących przez wspólny, jeden tylko punkt tego okręgu szeregi rzutowe,
4) biegunowe wzajemne prostej przecinającej okrąg podstawowy pęku sfer w jednym punkcie tworzą kwadrykę prostokreślną;
5) płaszczyzny styczne do sfer pęku $(\Omega)$ w ich punktach przebicia prostą mającą z okręgiem podstawowym jeden tylko punkt wspólny tworzą powierzchnię stopnia drugiego.

W artykule pt. "O pewnej własności pęku okręgów" [1] dowiedziono następującego twierdzenia: "Punkty przecięcia dowolnej prostej przechodzącej przez jeden i tylko jeden rzeczywisty punkt podstawowy pęku okręgów z 4 dowolnymi okręgami tego pęku pozostają w dwustosunku niezależnym od położenia prostej; dwustosunek ten równy jest temu, jaki tworzą odpowiednie styczne tych okręgów w punkcie podstawowym pęku". Celem niniejszej pracy jest ujawnienie niektórych konsekwencji tego twierdzenia.

Weźmy pod uwagę dowolny pęk okręgów o punktach podstawowych P, Q oraz prostą $m \in P$, $m \notin Q$ (rys. 1). Oznaczmy okręgi pęku symbolami $a^2$, $b^2$, $c^2$, styczne do nich w punkcie P odpowiednio przez a, b, c, a punkty wspólne prostej m z okręgami $a^2$, $b^2$, $c^2$... kolejno jako A, B, C. Z przytoczonego twierdzenia mamy relację:

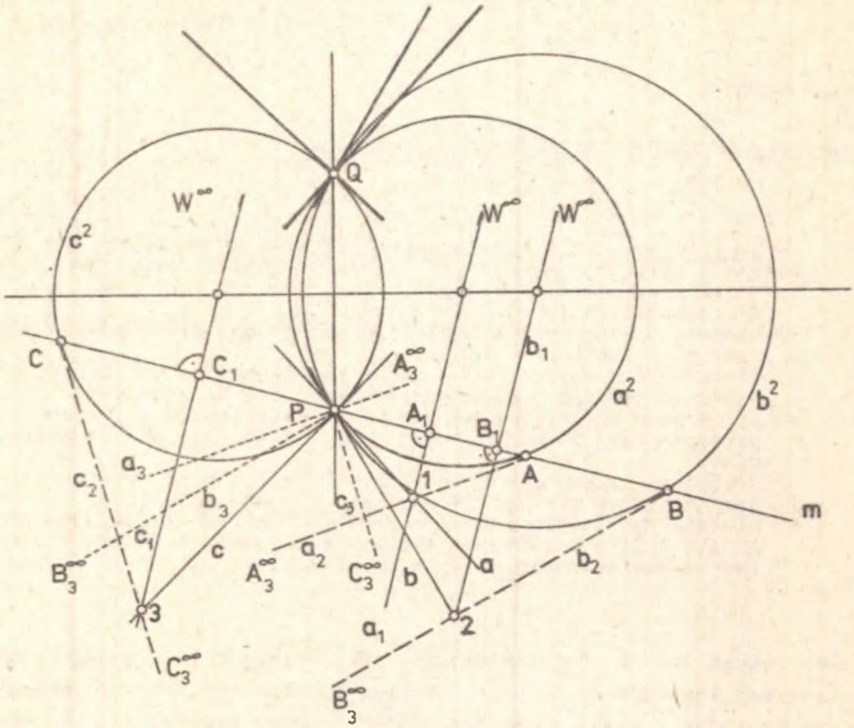
$$m(A,B,C...) \barwedge P(a,b,c...) \tag{1}$$

Rozważmy na prostej m drugi szereg punktów o elementach $A_1$, $B_1$, $C_1$.... taki, że zachodzi:

$$\overline{PA}_1 = \frac{\overline{PA}}{2}, \quad \overline{PB}_1 = \frac{\overline{PB}}{2} \tag{2}$$

Mamy równość:

$$(A_1\ B_1\ C_1\ D_1 = (ABCD) \tag{3}$$




Rys. 1

a w konsekwencji:

$$m(A_1, B_1, C_1, \ldots) \barwedge m(A, B, C \ldots) \tag{4}$$

Z (1) i (4) wynika:

$$m(A_1, B_1, C_1, \ldots) \barwedge P(a, b, c, \ldots) \tag{5}$$

Zrzutujmy z punktu niewłaściwego $W^\infty$ prostej prostopadłej do m szereg $m(A_1, B_1, C_1 \ldots)$. Otrzymujemy:

$$W^\infty(a_1, b_1, c_1 \ldots) \barwedge m(A_1, B_1, C_1 \ldots) \tag{6}$$

a jednocześnie:

$$W^\infty(a_1, b_1, c_1 \ldots) \barwedge P(a, b, c \ldots) \tag{7}$$

Punkty przecięcia odpowiadających sobie prostych w obydwu pękach ($a \cap a_1$, $b \cap b_1$ ...) tworzą stożkową. Zauważmy, że są to punkty przecięcia stycznych $a_2, b_2, c_2 \dots$ do okręgów w punktach A,B,C... ze stycznymi w punkcie P. Udowodniliśmy więc:

Twierdzenie 1

W pęku okręgów bieguny prostej przechodzącej przez jeden i tylko jeden punkt podstawowy leżą na stożkowej.

Przyjmijmy pęk prostych (P) o elementach $a_3, b_3, c_3$ takich, że $a_3 \parallel a_2$, $b_3 \parallel b_2 \dots$ Wobec symetrii pęków P(a,b,c) i $P(a_3, b_3, c_3 \dots)$ (przy kierunku symetrii prostopadłym do prostej m) zachodzi:

$$P(a_3, b_3, c_3 \dots) \barwedge P(a,b,c \dots). \tag{8}$$

Rozważmy szereg punktów przecięcia pęku $P(a_3, b_3 \dots)$ prostą $t^\infty$. Stwierdzamy związki:

$$t^\infty(A_3^\infty, B_3^\infty, C_3^\infty \dots) \overline{\barwedge} P(a_3, b_3, c_3) \barwedge P(a,b,c \dots) \tag{9}$$

Uwzględniając (1) otrzymujemy:

$$t^\infty(A_3^\infty, B_3^\infty, C_3^\infty \dots) \barwedge m(A,B,C \dots). \tag{10}$$

Z powyższego wynika, że proste $a_2, b_2, c_2 \dots$, łączące pary odpowiadających sobie punktów: $A, A_3^\infty$, $B, B_3^\infty \dots$, tworzą stożkową. Mamy więc kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2

Styczne do poszczególnych okręgów pęku (PQ), przechodzące przez punkty przecięcia tych okręgów dowolną prostą przynależną do jednego tylko punktu podstawowego, tworzą stożkową. Można ustalić, że wobec relacji (10) stożkowa ta jest parabolą.

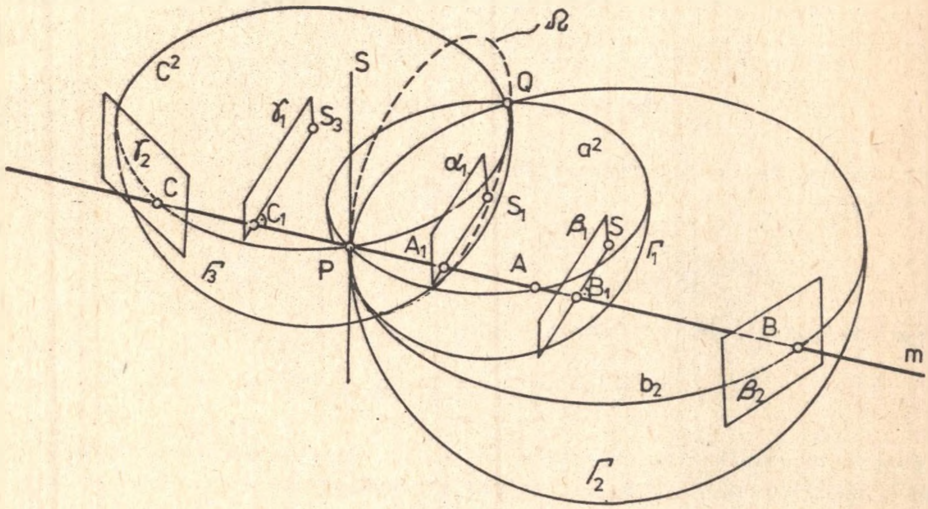
Rozważmy wreszcie: pęk sfer o wspólnym okręgu podstawowym $\Omega$ (rys. 2) oraz dowolną prostą m przecinającą ten okrąg w jednym tylko punkcie P (tj. nie leżącą w płaszczyźnie okręgu). Udowodnimy

Twierdzenie 3

Punkty przebicia dowolnej czwórki sfer pęku o okręgu podstawowym $\Omega$ przez dowolną prostą m przecinającą okrąg $\Omega$ w jednym tylko punkcie pozostają w dwustosunku niezależnym od położenia prostej w przestrzeni; dwustosunek ten jest równy temu jaki tworzą odpowiednie płaszczyzny styczne w punkcie wspólnym prostej m i okręgu $\Omega$.

Dowód

Przyjmijmy dowolną płaszczyznę $\mu$ zawierającą prostą m. Płaszczyzna $\mu$ przecina okrąg $\Omega$ w dwóch punktach P i Q, a pęk sfer w pęku okręgów o punktach podstawowych P i Q. Punkty przecięcia prostą m tych okręgów są punktami przebicia przez tę prostą sfer pęku $(\Omega)$. W oparciu o twierdzenie powołane na wstępie niniejszej pracy prostą $m$ można dowolnie obrócić w płaszczyźnie $\mu$ dookoła punktu $P = m \cap \Omega$, nie zmieniając przy tym wartości dwustosunku punktów przecięcia nią określonych czwórek okręgów. Ponieważ punkty te to jednocześnie punkty przebicia sfer pęku $(\Omega)$ wnosimy, że istotnie dwustosunek ten nie zależy od położenia prostej $m$,co oznacza zakończenie dowodu pierwszej części twierdzenia.




Rys. 2

Zauważmy z kolei, że w każdym z przekrojów pęku sfer płaszczyzną zawierającą prostą $m$ zachodzi również rzutowość pomiędzy szeregiem punktów przecięcia prostą $m$ okręgów pęku $(PQ)$ oraz pękiem stycznych do okręgów w punkcie P. W pęku sfer proste styczne do okręgów w punkcie P tworzą płaszczyzny styczne do odpowiednich sfer w tymże punkcie. Jest przy tym widoczne, że zbiór takich płaszczyzn stycznych jest pękiem ponieważ wszystkie płaszczyzny tego zbioru zawierają wspólną prostą $s$ styczną w punkcie P do okręgu podstawowego $\Omega$. Z perspektywiczności pęku prostych stycznych do pęku płaszczyzn stycznych wynika zachowanie się dwustosunku a więc i prawdziwość drugiej części twierdzenia 3.

Interpretując przestrzennie twierdzenia 1 i 2 możemy wyprowadzić:

Twierdzenie 4

W pęku sfer $(\Omega)$ biegunowe wzajemne prostej $m$ przechodzącej przez jeden tylko punkt okręgu podstawowego tworzą kwadrykę prostokreślną.

Dowód

Biegunowymi wzajemnymi prostej $m$ przecinającej okrąg $\Omega$ w dokładnie jednym punkcie P, a sfery pęku $(\Omega)$ w punktach A,B,C... są krawędzie płaszczyzn stycznych $\alpha, \beta, \gamma$ do tych sfer w punkcie P oraz płaszczyzn $\alpha_1$, $\beta_1 \dots$ przechodzących przez środki sfer prostopadle do prostej m. Płaszczyzny $\alpha_1, \beta_1 \dots$ wycinają na prostej m szereg punktów o elementach $A_1, B_1 \dots$, który na zasadzie rozważań pęku okręgów spełnia warunek:

$$m(A_1, B_1, C_1 \dots) \bar{\wedge} m(A, B, C \dots). \tag{11}$$

Wynika stąd rzutowość:

$$t^{\infty}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots) \bar{\wedge} m(A, B, C) \tag{12}$$

a w dalszej konsekwencji:

$$t^{\infty}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots) \bar{\wedge} s(\alpha, \beta, \gamma \dots). \tag{13}$$

Zbiór prostych $f_i$ będących krawędziami przyporządkowanych sobie płaszczyzn w obydwu pękach $f_1 = \alpha \cap \alpha_1$, $f_2 = \beta \cap \beta_1 \dots$ jest zbiorem tworzących powierzchni prostokreślnej stopnia drugiego, co należało dowieść.

Twierdzenie 5

Płaszczyzny styczne do poszczególnych sfer pęku $(\Omega)$, przechodzące przez punkty przebicia tych sfer dowolną prostą m, przecinającą w dokładnie jednym punkcie okrąg $\Omega$ tworzą powierzchnię stopnia drugiego.

Dowód

Rozważmy zbiór płaszczyzn $\alpha, \beta \dots$ stycznych do sfer pęku $(\Omega)$ w punkcie P. Jest nim pęk o osi s stycznej do okręgu $\Omega$ w punkcie P. Przyjmijmy płaszczyznę $\sigma$ przechodzącą przez punkt P prostopadle do prostej m i przekształćmy symetrycznie względem niej pęk $s(\alpha, \beta, \dots)$. Otrzymujemy pęk $\bar{s}(\alpha_3, \beta_3 \dots)$, przy czym zachodzi:

$$\bar{s}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots) \bar{\wedge} s(\alpha, \beta, \gamma \dots) \tag{14}$$

Zauważmy, że płaszczyzny pęku $(\bar{s})$ są odpowiednio równoległe do tych płaszczyzn $\alpha_2, \beta_2 \dots$, które przechodzą przez punkty A, B, C... stycznie do przynależnych im sfer pęku $(\Omega)$. Na podstawie twierdzenia 3 zachodzi związek:

$$\bar{s}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots) \bar{\wedge} m(A, B, C \dots) \tag{15}$$

Przetnijmy pęk $(\bar{s})$ płaszczyzną niewłaściwą. Otrzymujemy:

$$s^{\infty}(a_3^{\infty}, b_3^{\infty}, c_3^{\infty} \dots) \bar{\bar{\wedge}} \bar{s}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots) \tag{16}$$

oraz

$$s^{\infty}(a_3^{\infty}, b_3^{\infty}, c_3^{\infty} \dots) \bar{\wedge} m(A, B, C \dots) \tag{17}$$

Weźmy pod uwagę zbiór płaszczyzn określonych przez punkty A,B,C... i przyporządkowane im w powyższej rzutowości proste $a_3^{\infty}, b_3^{\infty}$... Stwierdzamy, że zbiór ten tworzy powierzchnię stopnia drugiego, co oznacza zakończenie dowodu.

Zaznaczmy na koniec, że uwagi powyższe wyprowadzone z rozważań pęku okręgów odnieść można do pęku stożkowych w ogólniejszym położeniu. Wystarczy w tym celu rozpatrzyć jedno z przekształceń rzutowych, np. związek kolineacji środkowej nie naruszający ustalonych zależności.

## LITERATURA

[1] Palej M.: O pewnej własności pęku okręgów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Matematyka-Fizyka nr 5, Gliwice 1964.

## ПРИМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ПУЧКА ОКРУЖНОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе, являющейся дополнением прежней работы автора [1] сформулировано пять теорем характеризующих некоторые свойства пучка окружностей и представлено их пространственную интерпретацию.

## A CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF SOME PROPERTIES OF A PENCIL OF CIRCLES

S u m m a r y

In this article, which supplements previous paper [1] of the author, are given five theorems concerning further properties of a pencil of circles together with their spatial interpretation.