ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Marian PALEJ
Stanisław SULWIŃSKI

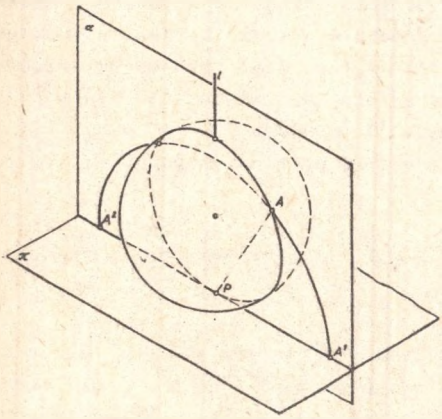
O WŁASNOŚCIACH PEWNEGO PRZEKSZTAŁCENIA SFERY

Streszczenie. W artykule przedstawiono geometryczną konstrukcję przekształcenia sfery na koło w oparciu o krzywoliniowe rzutowanie punktów sfery w punkty płaszczyzny do niej stycznej, dowodząc następnie twierdzenia, że rzutem okręgu należącego do przekształcanej sfery jest krzywa rzędu czwartego.

1. W literaturze kartograficznej, np. [1], można znaleźć omówienie pewnego wiernopowierzchniowego odwzorowania sfery, zwanego rzutem azymutalno-wiernopowierzchniowym Lamberta. Przekształcenie to jest przy tym rozpatrywane w kategoriach przekształcenia analitycznego.

W niniejszym artykule przedstawia się syntetyczne ujęcie tego zagadnienia z omówieniem kilku istotnych jego własności.

2. Niech dowolna płaszczyzna π będzie płaszczyzną rzutu. Sfera $\mathcal{K}_P$ ma dowolny, ale ustalony promień r oraz jest styczna do rzutni π. Punkt $P \in \mathcal{K}_P$ jest punktem styczności rozważanej sfery z rzutnią π. Jedną z osi sfery jest prosta $l : P \in l$, a zatem punkt P jest jednym z biegunów kuli. Prosta l określa pęk płaszczyzn $[\alpha_i] \perp \pi$ zwanych dalej płaszczyznami osiowymi, które znaczą na sferze przekroje południkowe. Jeżeli dowolny punkt $A \in \mathcal{K}_P (A \neq P)$, to istnieje $\alpha_A = Al$ oraz okrąg σ zawarty w $\alpha_A : \sigma(P, |OA|)$.



Definicja

Rzutem krzywoliniowym $\mathcal{L}(A)$ punktu A na rzutnię π są punkty A^1 i $A^2 : \{A^1, A^2\} = \sigma \cap \pi$. W tak określonym przekształceniu $\mathcal{L}$ ortogonalna sieć współrzędnych geograficznych przekształca się na płaską sieć ortogonalną, utworzoną z pęku okręgów o środku P i pęku odcinków o wierzchołku P. Przy tym rzutem bieguna przeciwległego biegunowi P jest okrąg o promieniu równym podwojonemu promieniowi sfery $\mathcal{K}_P$.

3. Niech będzie dany dowolny okrąg $s \in \mathcal{K}_P$. Poddając okrąg s przekształceniu $\mathcal{L}$ otrzymujemy krzywą $\mathcal{L}(s)$ i pytamy o rząd r krzywej przekształconej $\mathcal{L}(s)$. W tym celu posłużymy się twierdzeniem 1 [1].

Twierdzenie 1

Rząd r krzywej $\mathcal{L}(s)$ otrzymanej w wyniku przecięcia się dwu pęków $\Pi^i s^p$ i $\Pi^l s^q$, znajdujących się w $[m,n]$ - znacznej odpowiedniości jest równy

$$r = m \cdot p \cdot l + n \cdot q \cdot i;$$

$\Pi^i s^p$ - oznacza tutaj pęk i-tego rzędu krzywych s rzędu p-tego; $\Pi^l s^q$ - oznacza pęk l-tego rzędu krzywych s rzędu q-tego; $[m,n]$ - oznacza, że jednemu elementowi pęku $\Pi^i s^p$ odpowiada n elementów pęku $\Pi^l s^q$ i na odwrót - jednemu elementowi pęku $\Pi^l s^q$ odpowiada m elementów pęku $\Pi^i s^p$.

Lemat

Okrąg $s \in \mathcal{K}_P$ oraz krzywa $\mathcal{Z}(s)$ pozostają w odpowiedniości $(4,2)$ - znacznej.

Dowód

Rozważamy dowolną prostą a rzutni $\pi : P \in a$. Promień a i prosta l wyznaczają płaszczyznę osiową $\alpha = la$. Płaszczyzna ta rozcina okrąg s w dwu punktach A i B (rzeczywistych lub urojonych). Punkty A i B wyznaczają dwie współśrodkowe sfery S_A i S_B o środku P, a zatem - jednej prostej pęku $[P]$ odpowiadają dwa okręgi należące do pęku okręgów o środku P. Niech b oznacza dowolny okrąg pęku okręgów o środku P. Okrąg b jest równikiem sfery S_b o środku w punkcie P. Przekrój $S_b \cap s$ jest zbiorem czteropunktowym, przy czym co najmniej dwa punkty są nierzeczywiste. Te cztery punkty $A_1,\ldots,A_4$ wyznaczają wspólnie z osią l płaszczyzny $\alpha_i = A_i l$ $(i = 1,\ldots,4)$, które na rzutni π wskazują cztery promienie pęku $[P]$. c.n.d.

Twierdzenie 2

Rzutem krzywoliniowym $\mathcal{L}(s)$ okręgu $s \in \mathcal{K}_P$ jest krzywa rzędu ósmego.

Dowód

W oparciu o twierdzenie 1 i lemat krzywa $\mathcal{L}(s)$ powstaje jako przekrój odpowiednich promieni dwu pęków $\Pi^1 s^1$ (pęk prostych) i $\Pi^1 s^2$ (pęk okręgów) pozostających w $[4,2]$ - znacznej odpowiedniości, więc rząd r krzywej $\mathcal{L}(s)$:

$$r = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

Z uwagi na występowanie elementów urojonych można wnosić, że krzywa $\mathcal{L}(s)$ składać się będzie z kilku gałęzi niższych rzędów.

4. Podkreślamy, że prosta l (oś sfery $\mathcal{K}_P$) jest w dalszym ciągu osią pęku płaszczyzn osiowych. Następnie na rzutni obieramy dowolną prostą m: $P \notin m$. Dowolna płaszczyzna α_Q pęku o osi l przecina prostą m w pewnym punkcie Q, który razem z punktem P wyznacza okrąg $\sigma(P,|PQ|)$.

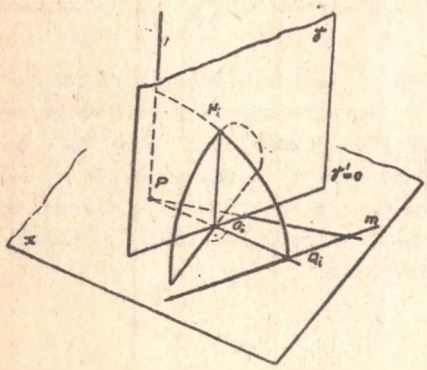
Definicja

Zbiór wszystkich okręgów $\sigma(P,|PQ|)$ takich, że każdy punkt $Q \subset m$ i $\sigma \in \alpha_Q = lQ$ nazywamy powierzchnią cykliczną Σ_m. Rzutem punktów leżących w powierzchni Σ_m jest nie tylko prosta m, ale para $(m = m^1, m^2)$, gdzie m^2 jest prostą środkowo-symetryczną do m względem P. Tak więc z rzędu krzywej p wnosimy, że jej rzut sferyczny $\mathcal{L}(p)$ winien mieć osiem punktów wspólnych z parą prostych $\{m^1, m^2\}$. Jednak wobec symetrii o środku P, na rzut $\mathcal{L}(p)$ krzywej p składają się dwie gałęzie p^1 i p^2, z których każda może mieć z prostą cztery punkty wspólne. A zatem udowodniono twierdzenie:

Twierdzenie 3

Rzutem $\mathcal{L}(s)$ okręgu $s \subset \mathcal{K}_P (P \notin s)$ jest krzywa rzędu ósmego, składająca się z dwu środkowo-symetrycznych krzywych rzędu czwartego.

6. Interesujący jest związek powierzchni Σ_m z powierzchnią rozpatrywaną w pracy [3]. Powierzchnia Φ utworzona jest przez okręgi σ spełniające następujące warunki:



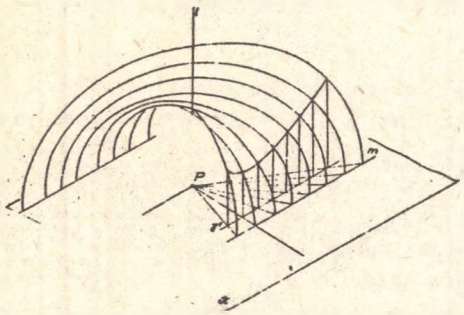
a) środki O_i okręgów σ_i leżą w prostej o i wyznaczają wraz z dowolnym punktem $P \notin m$ pęk prostych $[P]$;

b) płaszczyzny okręgów σ_i są prostopadłe do odpowiednich promieni pęku $[P]$;

c) promienie okręgów σ_i są proporcjonalne do odległości ich środków od punktu $[P]$.

Po przedstawieniu tych faktów rozważamy przekrój powierzchni Σ_m płaszczyzną $\gamma \parallel l,m$. Jeżeli potraktujemy rzut prostokątny płaszczyzny γ na rzutnię π jako prostą σ, wówczas można tak dobrać promień okręgu σ_i o środku w prostej σ, aby był on okręgiem tworzącym powierzchnię. Powierzchnia cykliczna Σ_m generowana w opisany sposób przez prostą m ma trzy płaszczyzny symetrii prostokątnej: rzutnię π, płaszczyznę $\sigma_1 \perp m$

oraz płaszczyznę $\sigma_2 \| m$ $(l \in \sigma_2)$. W elementarny sposob można wyliczyć, że powierzchnia jest reprezentowana równaniem $y^2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2(x^2 + y^2)$, gdzie oś $z \equiv l$, $y \perp m$, zaś $y = a$ jest równaniem prostej m. A zatem powierzchnia Σ_m jest powierzchnią czwartego rzędu.



5. Korzystając z własności powierzchni Σ_m przeprowadzimy następujące rozumowanie. Niech s oznacza w dalszym ciągu okrąg $s \in \mathcal{K}_P$ zaś $\mathcal{L}(s)$ rzut krzywoliniowy tego okręgu na π. Wprowadzamy dowolną prostą $m \subset \pi$: $\rho(m,P) <$ średnicy sfery $\mathcal{K}_P$ oraz rzutującą ją powierzchnię Σ_m. Linia przenikania $p = \Sigma_m \cap \mathcal{K}_P$ ma rząd ósmy jako iloczyn rzędów powierzchni Σ_m i $\mathcal{K}_P$. Zatem dowolna płaszczyzna φ ma z krzywą p osiem punktów wspólnych. Rozważamy płaszczyznę $\mathcal{E}$: $s \in \mathcal{E}$. Punkty przekroju $\mathcal{E} \cap p$ zrzutowane krzywoliniowo na π są punktami przecięcia krzywej prostą m. Ale w rozpatrywanym przekształceniu $\mathcal{L}$ obrazem dowolnego punktu A jest para $\{A^1, A^2\}$ Jednak punkty krzywej p są środkowo-symetryczne względem P, a zatem para $\{A^1, A^2\}$ jest obrazem nie jednego, ale dwóch, symetrycznie położonych punktów krzywej p, więc rzutem $\mathcal{L}(s)$ krzywej s jest krzywa rzędu ósmego. Zachodzi bowiem $o \| m$ i w ślad za tym O_iH_i/PQ_i = const. Punkty H_i są więc punktami powierzchni Φ, a jednocześnie powierzchni Σ_m, przy czym są to wszystkie punkty wspólne tych powierzchni. Można więc stwierdzić, że powierzchnie Σ_m i Φ przecinają się w krzywej określonej punktami H_i. Wiadomo jednak [3], że jest to hiperbola i niezależnie od rozważań analitycznych stwierdzamy, że przekrój warstwowy powierzchni Σ_m płaszczyzną $\gamma \| l, m$ jest hiperbolą.

7. Inny dowód na tę własność powierzchni Σ_m można prowadzić rozpatrując powierzchnię stożkową o wierzchołku P i tworzących przechodzących przez punkty H_i. Zauważamy bowiem, że O_iH_i/PQ_i = const., a zatem kąty utworzone przez tworzące PH_i z rzutnią π są stałe, to znaczy stałe są również kąty tych tworzących z osią l. Powierzchnia stożkowa o wierzchołku P i tworzących PH_i jest więc obrotowa, a zbiór punktów H_i należy do jej przekroju płaszczyzną γ i jest hiperbolą.

LITERATURA

[1] Łomnicki A.: Kartografia matematyczna. PWN, Warszawa 1956.

[2] Obuchowa W.S.: Sinteticzeskij metod postrojenija algebraiczeskich kriwych linii. Prikł. geom. i inż. grafika, Nr XI, Kijew 1970.

[3] Tran Duy Tac: Analiza konstrukcji określonych z dokładnością do podobieństwa n-kątów płaskich, rozpiętych na n prostych dowolnych. Praca doktorska, Pol. Śląska, Gliwice 1974.

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СФЕРЫ

Р е з ю м е

В работе представлено геометрическую конструкцию преобразования сферы в окружность с использованием криволинейного проектирования точек сферы на точки плоскости касательной к сфере. Доказано, что проекцней окружности принадлежащей к трансформируемой сфере является кривая четвертого порядка.

ABOUT THE PROPERTIES OF SOME TRANSFORMATION OF A SPHERE

S u m m a r y

The paper presents geometrical construction of the transformation of a sphere into circle based on curvilinear projection of the points of the sphere onto the points of a plane tangent to this sphere. It has been proved that the circle belonging to the sphere is transformed into the curve of the fourth order.