ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 35 Nr kol. 624

Marian PALEJ

Anna POGONOWSKA

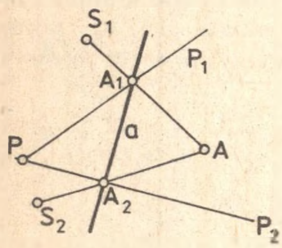
O WŁASNOŚCI PASMA STOŻKOWYCH WYNIKAJĄCEJ Z PEWNEGO PRZEKSZTAŁCENIA PŁASKIEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie pewnego przekształcenia płaszczyzny na siebie do sformułowania i dowodu następującego twierdzenia o pasmie stożkowych:

Styczne stożkowych pasma przechodzące przez dwa dowolnie wybrane punkty na dokładnie jednej prostej podstawowej tworzą pęki rzutowe do szeregu tych punktów, w których prosta podstawowa styka się z odpowiednimi stożkowymi pasma.

Bazę rozpatrywanego przekształcenia stanowią dwie różne, dowolne proste oraz dwa środki rzutów nie leżące na tych prostych. Istota przekształcenia polega na przyporządkowaniu dowolnemu punktowi takiej prostej, która przechodzi przez jego rzuty z danych środków na dane proste bazy. Wykazano, że obrazem prostej w przekształceniu jest stożkowa, a obrazem pęku prostych - pasmo stożkowych.

Na dziesiątym zebraniu Otwartego Seminarium Geometrii Wykreślnej w Gliwicach, w listopadzie 1978 referowano jedno z przekształceń płaszczyzny na siebie, którego ogólniejsza wersja opiera się na następujących założeniach: dana jest (rys. 1) dowolna para nierównoległych prostych bazy p_1 i p_2 oraz dowolna para punktów S_1 i S_2 takich, że $S_1 \notin p_1$; $S_2 \notin p_2$. Rozpatrujemy przekształcenie, w którym obrazem dowolnego punktu A jest prosta a, przechodząca przez dwa punkty: rzut punktu A ze środka S_1 na prostą bazy p_1 oraz rzut punktu A ze środka S_2 na prostą bazy p_2.



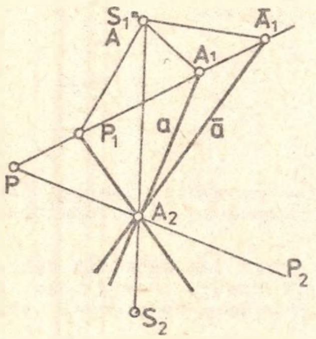
Rys. 1

Zauważmy następujące własności tego przekształcenia:

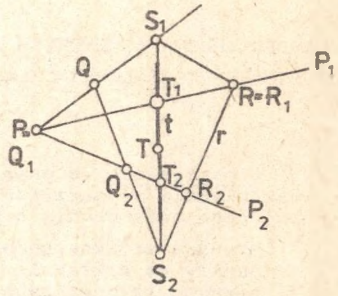
1. Każdemu punktowi różnemu od środków S_1 i S_2, i $P = p_1 \cap p_2$ odpowiada dokładnie jeden obraz W przypadku identyczności punktu z jednym ze środków (rys. 2) S_1 lub S_2 obrazem jego jest pęk prostych o wierzchołku $S_1S_2 \cap p_2$ lub $S_1S_2 \cap p_1$.

2. Każdej prostej a traktowanej jako obraz, różnej od p_1, p_2 oraz S_1S_2 odpowiada dokładnie jeden praobraz - ściśle określony punkt A. W przypadku identyczności prostej z osią łączącą środki S_1S_2 (rys. 3) -

praobrazem jest zbiór punktów tej prostej, tj. cała prosta S_1S_2. Praobrazem prostej bazy jest prosta łącząca odpowiedni środek rzutów z punktem $P = p_1 \cap p_2$ tzw. wierzchołkiem bazy.



Rys. 2



Rys. 3

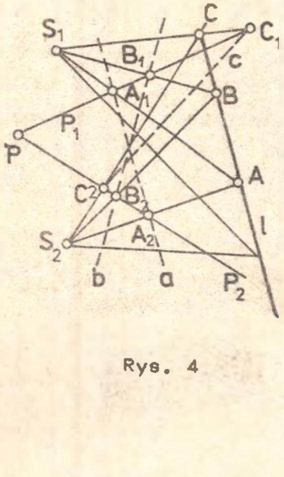
3. Obrazem punktu leżącego na prostej łączącej środek S_1 lub S_2 z wierzchołkiem bazy jest odpowiednia prosta bazy.
4. Obrazem punktu leżącego na prostej bazy jest prosta łącząca ten punkt z odpowiednim środkiem rzutów.
5. Obrazem punktu leżącego na osi $S_1 S_2$ jest sama oś $S_1 S_2$.

Dowiedziemy istotnych dla dalszych rozważań własności przekształcenia wyrażonych w lematach:

I. Obrazem dowolnej prostej jest stożkowa.
II. Obrazem pęku prostych jest pasmo stożkowych.

Ad I - dowód

Rozpatrzmy szereg punktów $l(A,B...)$ (rys. 4), który zrzutujmy ze środka S_1 na prostą bazy p_1 oraz ze środka S_2 na prostą bazy p_2. Otrzymujemy szeregi $p_1(A_1,B_1...)$, $p_2(A_2B_2....)$oraz wiążącą je relację:



Rys. 4

$$p_1(A_1,B_1,\dots)\ \bar{\wedge}\ (l(A,B,\dots)\ \bar{\wedge}\ p_2(A_2,B_2,\dots) \quad (1)$$

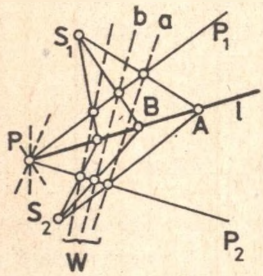
czyli

$$(p_1)\ \bar{\wedge}\ (p_2). \quad (2)$$

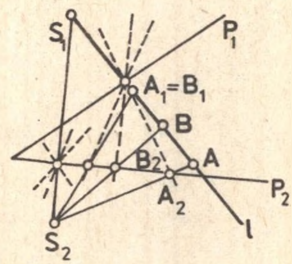
Z powyższego wynika, że proste A_1A_2, B_1B_2... tworzą stożkową. Ponieważ proste te są obrazami poszczególnych punktów prostej l wnioskujemy, że obrazem prostej jest istotnie stożkowa, co należało udowodnić.

Warto tu zauważyć przypadki, w których stożkowa stanowiąca obraz prostej ulega zdegenerowaniu. Zachodzi to przy szczególnych położeniach prostej, a mianowicie:

a) jeżeli prosta przechodzi przez wierzchołek bazy, wówczas jej obrazem są dwa pęki prostych (rys. 5), w tym jeden o wierzchołku P; wynika to stąd, że w rzutowych szeregach (p_1), (p_2) istnieje jedna para punktów homologicznych zjednoczonych i że w rezultacie szeregi te są perspektywiczne,



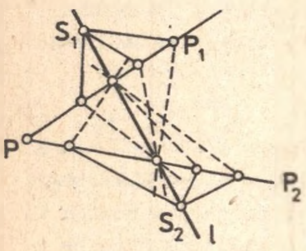
Rys. 5



Rys. 6

b) jeżeli prosta przechodzi przez jeden ze środków S_1 lub S_2 (rys. 6), wówczas obraz jej degeneruje się do dwóch pęków; wierzchołkiem jednego z nich jest punkt przecięcia prostą odpowiedniej prostej bazy - wierzchołkiem drugiego, stanowiącego obraz środka S_1 lub S_2 jest punkt przecięcia pozostałej prostej bazy przez oś $S_1\ S_2$,

c) jeżeli prosta przechodzi przez obydwa środki rzutów (rys. 7), tj. pokrywa się z osią $S_1\ S_2$, zdegenerowany jej obraz stanowią pęki o wierzchołkach w punktach przecięcia tej osi z prostymi bazy.



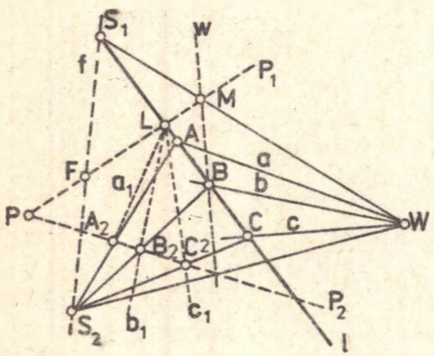
Rys. 7

Ad II - dowód

Zauważmy, że elementami obrazu każdej prostej są proste bazy p_1, p_2 jako podstawy rzutowych szeregów punktów (2) oraz oś $S_1\ S_2$ jako obraz takiego punktu każdej prostej, który leży na osi, tj. punktu przecięcia się tej prostej z osią. Jeżeli dwie lub więcej prostych przechodzi przez wspólny punkt W, to ich obrazy muszą zawierać wspólną prostą w odpowiadającą w przekształceniu punktowi W. Tak więc obraz pęku prostych jest zbiorem stożkowych o wspólnych stycznych p_1, p_2, w $f = S_1S_2$, czyli pasmem, co było do udowodnienia.

W oparciu o lematy I i II przekształćmy dowolny pęk prostych $(a, b \ldots)$ (rys. 8) na pasmo stożkowych $(a^2, b^2 \ldots)$. W tym celu przetnijmy pęk $W(a, b, \ldots)$ dowolną prostą l przechodzącą przez jeden ze środków, np. punkt S_1. Otrzymujemy:

$$l(A, B \ldots) \barwedge W(a, b \ldots) \tag{3}$$



Rys. 8

Z przypadku b) wnioskujemy, że obrazy punktów szeregu $l(A, B \ldots)$ będą prostymi pęku $L(a_1, b_1, \ldots)$, przy czym zachowane będą przy tym związki:

$$L(a_1, b_1 \ldots) \barwedge p_2(A_2, B_2 \ldots) \barwedge$$
$$\barwedge S_2(S_2A_2,\ S_2B_2 \ldots) \barwedge W(a, b \ldots), \tag{4}$$

czyli

$$L(a_1, b_1 \ldots) \barwedge W(a, b \ldots) \tag{5}$$

Zauważmy, że relacje powyższe zachodzą dla dowolnych położeń prostej l zawierającej środek S_1 (lub S_2) z wykluczeniem przypadków alternatywnej przynależności do punktów: $P = p_1 \cap p_2$, $F = f \cap p_1$, $M = W \cap p_1$. Jest bowiem widoczne, że w przypadkach tych zachodzi:

d) jeżeli prosta l przechodzi przez punkt P - pęk $L(a_1, b_1 \ldots)$ degeneruje się do prostej p_2,

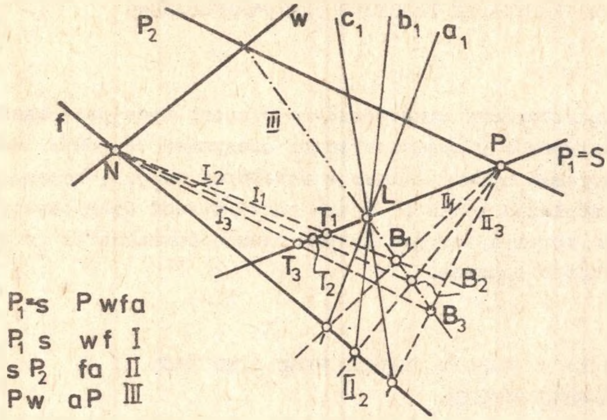
e) jeżeli prosta l przynależy do punktu F, wówczas pokrywa się ona z osią $S_1 S_2$ i pęk (S_2) oraz (L) degeneruje się do prostej $f = S_1S_2$,

f) jeżeli prosta l zawiera punkt M, wówczas jednocześnie przechodzi przez wierzchołek pęku (W) i szereg $l(A, B \ldots)$ degeneruje się do punktu.

Tak więc dla dowolnych położeń punktu L na prostej p_1 (lub p_2) z wyłączeniem punktów P, F, M można stwierdzić, że przynależne do niego styczne do dowolnych czterech stożkowych pasma o prostych podstawowych p_1, p_2, f, w pozostają w stałym dwustosunku, niezależnym od położenia punktu L. Ponieważ w danej czwórce prostych podstawowych pasma stożkowych dowolne z nich dwie możemy traktować jako proste bazy p_1 i p_2, a pozostałe jako oś f i prostą w, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

"Styczne stożkowych pasma przechodzące przez dwa dowolnie wybrane punkty na dokładnie jednej prostej podstawowej tworzą pęki rzutowe"

Formułując twierdzenie dwoiste rozpoznajemy własność pęku stożkowych, którą na innej drodze, przy użyciu konstrukcji Pascala i Steinera, udowodniono w pracy [1].



Rys. 9

Rozpatrzmy jeszcze konstrukcję Brianchona w celu wyznaczenia punktów styczności prostej p_1 do stożkowych pasma, określonych przez proste podstawowe p_1, p_2, f, w oraz kolejne proste pęku (L). Jak wynika to z rys.9 przy obrocie stycznej a_1 dokoła punktu L, punkty styczności prostej podstawowej p_1 do kolejnych stożkowych pasma przebiegają szereg o elementach $T_1, T_2, T_3 \ldots$, który spełnia warunek:

$$p_1(T_1, T_2, \ldots) \;\bar{\wedge}\; N(NT_1, NT_2 \ldots) \;\bar{\wedge}\; P(PB_1,\; PB_2 \ldots) \;\bar{\wedge}\; l(a_1, b_1 \ldots) \tag{6}$$

czyli

$$p_1(I_1, T_2 \ldots) \;\bar{\wedge}\; L(a_1, b_1 \ldots). \tag{7}$$

Wynika stąd, że sformułowane wyżej twierdzenie można zaostrzyć:

"Styczne stożkowych pasma przechodzące przez dwa dowolnie wybrane punkty na dokładnie jednej prostej podstawowej tworzą pęki rzutowe do szeregu tych punktów, w których prosta podstawowa styka się z odpowiednimi stożkowymi pasma".

Jest oczywiste, że podobnemu zaostrzeniu można poddać twierdzenie dualne wyprowadzone w pracy [1].

LITERATURA

[1] Adasiewicz H., Koźniewski E.: O pewnej własności pęku stożkowych i jej konstrukcyjnym zastosowaniu. Zeszyty Naukowe "Geometria" XI - 1979.

О СВОЙСТВЕ ПОЛОСЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ВЫТЕКАЮЩЕМ ИЗ НЕКОТОРОГО ПЛОСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлено применение некоторого преобразования плоскости на себя для формулировки и доказательства следующей теоремы: Касательные кривых второго порядка принадлежащих к некоторой полосе, переходящие через две произвольно избранные точки на точно одной прямой базы образуют проективные пучки с рядом точек в которых прямая базы соприкасается с соответственными кривыми второго порядка.

ON A PROPERTY OF A BEAM OF CONICS RESULTING FROM
SOME PLANE TRANSFORMATION

S u m m a r y

The paper presents an application of some transformation of a plane onto itself to formulate and prove the following theorem: The tangent lines of conics belonging to the given beam which go through any two arbitrarily chosen points on strictly one of the base lines form projective pencils to the points where the base line touches with respective conics of the beam.