ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 14 Nr kol. 243

GRAŻYNA KOZŁOWSKA
Katedra Matematyki D

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA RÓWNOCZESNEJ MINIMALIZACJI KOSZTÓW PRODUKCJI I TRANSPORTU ARTYKUŁÓW NIEJEDNORODNYCH

Streszczenie. W pracy uzasadniono możliwość rozwiązania zagadnienia minimalizacji kosztów transportu artykułów niejednorodnych, drogą kolejnej minimalizacji kosztów transportu poszczególnych asortymentów.
Podano również sposób sprowadzenia rozwiązywania zagadnienia równoczesnej minimalizacji kosztów produkcji i transportu artykułów niejednorodnych, do s - krotnego rozwiązania klasycznego zagadnienia transportowego.

1. Wstęp

W dostępnej literaturze nie napotkałam na próby rozwiązywania zagadnienia minimalizacji kosztów transportu artykułów niejednorodnych przy równoczesnym zaplanowaniu wielkości partii produkcyjnych w poszczególnych zakładach, tak by całkowity koszt produkcji przewożonych artykułów był najmniejszy. Zagadnienie to zostało sformułowane w niniejszej pracy i jego rozwiązanie sprowadzono do s -krotnego rozwiązania klasycznego zagadnienia transportowego.

Klasyczne zagadnienie transportowe dotyczy transportu produktu jednorodnego i można je sformułować w następujący sposób:

W pktach $A_1 \dots A_m$ zmagazynowany jest pewien produkt jednorodny w ilości a_i jednostek w pkcie A_i. Pkty odbioru $B_1 \dots B_n$ składają zamówienie na ten produkt, przy czym pkt B_j zamawia b_j jednostek.

Zakłada się, że

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = D \tag{1}$$

Koszt transportu jednostki towaru z i-tego pktu dostawy do j-tego odbiorcy wynosi c_{ij}. Należy tak zaplanować przewozy, by zrealizować wszystkie zamówienia, a całkowity koszt transportu był najmniejszy. Niech x_{ij} oznacza ilość produktu przewożonego na trasie i - j. Należy zatem znaleźć minimum funkcji

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{2}$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,\ldots,m \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\ldots,n \tag{4}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,..,m \quad j = 1,..,n \tag{5}$$

Warunek (1) jest WKW rozwiązalności tego zadania i znane są algorytmy pozwalające na efektywne wyznaczenie rozwiązania. Podobnie można sformułować zagadnienie transportu w przypadku artykułów niejednorodnych.

2. Minimalizacja kosztów transportu artykułów niejednorodnych

Neleży przewieźć towary "s" różnych asortymentów z "m" pktów dostawy $A_1 \ldots A_m$ do "n" pktów odbioru $B_1, \ldots, B_n$.
Pkt dostawy A_i posiada a_{ik} jednostek towaru asortymentu "k". Pkt odbioru B_j składa zamówienie na b_{jk} jednostek towaru asortymentu "k". Zakłada się, że

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} = D_k \qquad \text{dla } k = 1,\ldots,s$$

Koszt transportu jednostki "k"-tego asortymentu na trasie i - j wynosi c_{ijk}. Należy tak zaplanować przewozy, by zrealizować wszystkie zamówienia a całkowity koszt transportu był najmniejszy. Niech x_{ijk} oznacza liczbę jednostek towaru "k" -tego asortymentu, którą należy przewieźć od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Należy więc zminimalizować funkcję

$$L^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\, x_{ijk} \tag{6}$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = a_{ik} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,m \\ k = 1,\ldots,s \end{array} \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk} \qquad j = 1,\ldots,n; \quad k = 1,\ldots,s \tag{8}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \qquad i=1,\dots,m; \quad j=1,\dots,n; \quad k=1,\dots,s \qquad (9)$$

Tak sformułowane zagadnienie można sprowadzić do s-krotnego rozwiązania zadania (2)-(5) w następujący sposób:

$$L^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij1}x_{ij1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij2}x_{ij2} + \dots + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ijs}x_{ijs} =$$

$$L_1^* + L_2^* + \dots + L_s^* = \sum_{k=1}^{s} L_k^*$$

Zaplanujmy tak przewozy, by koszt transportu poszczególnych asortymentów był najmniejszy.

Niech

L_1 będzie min. funkcji $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij1}x_{ij1}$

L_2 " " " $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij2}x_{ij2}$

(10)

....

L_s " " " $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ijs}x_{ijs}$

Wtedy całkowity koszt transportu $\sum_{k=1}^{s} L_k \leqslant \sum_{k=1}^{s} L_k^* = L^*$,

bo $L_k \leqslant L_k^*$ dla $k = 1,\dots,s$

A zatem rozwiązanie zadania (6)-(9) znajdziemy minimalizując koszt transportu ze względu na poszczególne asortymenty.

Na odwrót, jeśli znamy rozwiązanie zadania (6)-(9) przy którym funkcja L^* osiągnie min., to $L^* \leqslant \sum_{k=1}^{s} L_k$ tzn. $L^* = \sum_{k=1}^{s} L_k$

czyli $\sum_{k=1}^{s} L_k^* = \sum_{k=1}^{s} L_k$. (11)

stąd $L_k^* = L_k$, bo gdyby dla pewnego "k" $L_k^* > L_k$, to na podstawie (11) musiałby istnieć wskaźnik $1 \leqslant l \leqslant s$, taki, że $L_l^* < L_l$ co sprzeczne z (10).

3. Minimalizacja kosztów produkcji i transportu produktu jednorodnego

W pktach $A_1, \ldots, A_m$ wytwarzany jest pewien produkt jednorodny przy czym w pkcie A_i wytwarza się y_i jednostek tego produktu (y_i nie jest dane). Koszt produkcji jednostki tego towaru w pkcie A_i wynosi d_i. Pkty odbioru $B_1, \ldots, B_n$ składają zamówienia na ten produkt przy czym pkt B_j zamawia b_j jednostek. Koszt transportu jednostki towaru z pktu A_i do pktu B_j wynosi c_{ij}. Należy tak ustalić wielkości y_i produkcji w poszczególnych pktach A_i i tak zaplanować przewozy, by zrealizować wszystkie zamówienia a łączny koszt produkcji i transportu był najmniejszy.

Niech x_{ij} oznacza liczbę jednostek produktu przewożoną na trasie $i - j$.

Należy zatem zminimalizować funkcję

$$L(y_i, x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} d_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{12}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = y_i \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m \tag{14}$$

$$\begin{array}{l} x_{ij} \geqslant 0 \\ y_i \geqslant 0 \end{array} \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$$

Oznaczmy przez p_i max. liczbę jednostek produktu jaka może być wytwarzana w pkcie A_i.

Naturalnie $0 \leqslant y_i \leqslant p_i$

Rugując z (12) zmienną y_i w oparciu o (14) mamy

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} d_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (d_i + c_{ij}) x_{ij}$$

Należy więc znaleźć min. funkcji

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (d_i + c_{ij}) x_{ij}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant p_i \qquad i = 1,\dots,m$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,\dots,m \quad j = 1,\dots,n$$

Wprowadźmy fikcyjny pkt odbioru B_{n+1}, który zamawia $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ jednostek towaru. Przyjmijmy, że $c_{i,n+1} = 0$. Wtedy sformułowane wyżej zagadnienie sprowadza się do klasycznego zagadnienia transportowego:

Zminimalizować

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} (d_i + c_{ij}) \; x_{ij}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\dots,n+1$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = p_i \qquad i = 1,\dots,m$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,\dots,m \qquad j = 1,\dots,n+1$$

Przy planowaniu produkcji należy pamiętać, że

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Przykład. W pktach A_1, A_2, A_3 może być wytwarzany pewien produkt w ilościach nie przekraczających odpowiednio wielkości $p_1 = 90$, $p_2 = 80$, $p_3 = 120$ jednostek. Koszt produkcji jednostki tego produktu w danych pktach wynosi odpowiednio $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = 3$. Pkty B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 składają zamówienia na ten produkt w ilościach $b_1 = 40$, $b_2 = 20$, $b_3 = 70$, $b_4 = 60$, $b_5 = 80$. Koszt transportu c_{ij} jednostki towaru na trasie i - j określa tabela 1.

Tablica 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	1	3	4	2
A_2	5	3	1	1	2
A_3	1	2	6	3	4

Zaplanować wielkości partii produkcyjnych w poszczególnych pktach A_i i zaplanować przewozy tak, aby całkowity koszt produkcji i transportu tego towaru był najmniejszy.

Wprowadźmy fikcyjny pkt odbioru B_6 składający zamówienie na

$b_j = \sum_{i=1}^{3} p_i - \sum_{j=1}^{5} b_j = 20.$ Niech $c_{i,6} = 0$

Należy zminimalizować $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} (d_i + c_{ij}) x_{ij}$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\ldots,6$$

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = p_i \qquad i = 1,\ldots,3$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1,\ldots,3 \; j = 1,\ldots,6$$

Warunki zadania zapiszmy w formie tablicy 2

Tablica 2

Odb. / Dost.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4	3	5	6	4	2	90
A_2	9	7	5	5	6	4	80
A_3	4	5	9	6	7	3	120
	40	20	70	60	80	20	

Metodą minimalnego elementu znajdujemy plan wyjściowy (tablica 3)

Tablica 3

Odb. / Dost.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	0^4	20^3	0^5	0^6	50^4	20^2	90
A_2	0^9	0^7	70^5	10^5	0^6	0^4	80
A_3	40^4	0^5	0^9	50^6	30^7	0^3	120
	40	20	70	60	80	20	

Dla tego planu wartość funkcji celu L = 1370.
Szukamy rozwiązania metodą potencjałów (tablica 4).

Tablica 4

u_i \ v_j	1	3	3	3	4	2
0	1	3	3	3	4	2
2	3	5	5	5	6	4
3	4	6	6	6	7	5

$$\alpha_{ij} = d_i + c_{ij}$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = u_i + v_j$$

Różnice $\bar{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}$ umieszczono w tablicy 5

Tablica 5

-3	0	-2	-3	0	0
-6	-2	0	0	0	0
0	1	-3	0	0	2

Obsadzamy trasę $A_3 - B_6$; $x_{3,6} = \varepsilon = 20$. Otrzymany plan podaje tablica 6.

Tablica 6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	0^{4}	20^{3}	0^{5}	0^{6}	70^{4}	0^{2}	90
A_2	0^{9}	0^{7}	70^{5}	10^{5}	0^{6}	0^{4}	80
A_3	40^{4}	0^{5} ε	0^{9}	50^{6}	10^{7}	20^{3}	120
	40	20	70	60	80	20	

L = 1330. Analogicznie postępując budujemy tablice 7 i 8.

Tablica 7

$u_i \backslash v_j$	1	3	3	3	4	0
0	1	3	3	3	4	0
2	3	5	5	5	6	2
3	4	6	6	6	7	3

$\bar{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}$

Tablica 8

-3	0	-2	-3	0	-2
-6	-3	0	0	0	-2
0	1	-3	0	0	0

Obsadzamy trasę $A_3 - B_2$; $x_{3,2} = \varepsilon = 10$. Otrzymujemy nowy plan podany w tablicy 9.

Tablica 9

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	0^{4}	10^{3}	0^{5}	0^{6}	80^{4}	0^{2}	90
A_2	0^{9}	0^{7}	70^{5}	10^{5}	0^{6}	0^{4}	80
A_3	40^{4}	10^{5}	0^{9}	50^{6}	0^{7}	20^{3}	120
	40	20	70	60	80	20	

L = 1320. Tablica 10 i 11 pozwalają stwierdzić, że ostatni plan jest optymalny.

Tablica 10

$u_i \backslash v_j$	2	3	4	4	4	1
0	2	3	4	4	4	1
1	3	4	5	5	5	2
2	4	5	6	6	6	3

$\bar{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}$

Tablica 11

-2	0	-1	-2	0	-1
-6	-3	0	0	-1	-2
0	0	-3	0	-1	0

Tak więc wielkości partii produkcyjnych i przewozów planujemy w następujący sposób: w pkcie A_i należy produkować

$y_i = \sum_{j=1}^{5} x_{ij}$ jednostek towaru tzn. w pkcie A_1 $y_1 = 90$

A_2 $y_2 = 80$

A_3 $y_3 = 100$

Plan przewozów jest następujący (tablica 12)

Tablica 12

Dost. \ Odb.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	0^4	10^3	0^5	0^6	80^4	90
A_2	0^9	0^7	70^5	10^5	0^6	80
A_3	40^4	10^5	0^9	50^6	0^7	100
	40	20	70	60	80	

Wtedy całkowity koszt produkcji i transportu $L = 1260$ i jest najmniejszy.

4. Minimalizacja kosztów produkcji i transportu artykułów niejednorodnych

W pktach $A_1,\dots,A_m$ wytwarza się towary "s" różnych asortymentów, przy czym w pkcie A_i produkuje się y_{ik} jednostek towaru asortymentu "k" (y_{ik} nie jest dane).
Koszt produkcji jednostki towaru asortymentu "k" w pkcie A_i wynosi d_{ik}. Pkty $B_1,\dots,B_n$ składają zamówienia na produkowane towary przy czym punkt B_j zamawia b_{jk} jednostek asortymentu "k". Koszt transportu jednostki towaru asortymentu "k" na trasie $i - j$ wynosi c_{ijk}. Należy tak ustalić wielkości produkcji w poszczególnych pktach A_i i tak zaplanować przewozy, by zrealizować wszystkie zamówienia a łączny koszt produkcji i transportu był najmniejszy. Niech x_{ijk} oznacza ilość jednostek towaru asortymentu "k" przewożoną na trasie $i - j$. Należy twięc zminimalizować funkcję

$$L(y_{ij},\, x_{ijk}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} y_{ik}\, d_{ik} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\, x_{ijk} \tag{15}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk} \qquad j = 1,\dots,n \quad k = 1,\dots,s \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = y_{ik} \qquad i = 1,\dots,m \quad k = 1,\dots,s \tag{17}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \quad y_{ik} \geqslant 0 \qquad i = 1,\dots,m \quad j = 1,\dots,n \quad k=1,\dots,s$$

Niech p_{ik} oznacza max liczbę jednostek asortymentu "k", jaka może być produkowana w pkcie A_i. Wtedy naturalnie $0 \leqslant y_{ik} \leqslant p_{ik}$ Rugując z (15) zmienną y_{ik} w oparciu o (17) otrzymujemy

$$L(x_{ijk}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} d_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ijk}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\,x_{ijk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} d_{ik}\,x_{ijk} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\,x_{ijk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} (d_{ik} + c_{ijk})\,x_{ijk}$$

Należy zatem znaleźć minimum

$$L(x_{ijk}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} (d_{ik} + c_{ijk})\,x_{ijk}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk} \qquad j = 1,\dots,n \qquad k = 1,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant p_{ik} \qquad i = 1,\dots,m \qquad k = 1,\dots,s$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \qquad i = 1,\dots,m \qquad j = 1,\dots,n \qquad k = 1,\dots,s$$

Wprowadzając fikcyjny punkt odbioru B_{n+1} o zapotrzebowaniu

$$b_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} p_{ik} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} b_{jk}$$

i przyjmując, że $c_{i,n+1,k} = 0$ sprowadzamy sformułowane zagadnienie do zwykłego zagadnienia transportowego trójindeksowego. Zminimalizować

$$L(x_{ijk}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{s} (d_{ik} + c_{ijk})\, x_{ijk}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk} \qquad j = 1,\ldots,n+1 \qquad k = 1,\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ijk} = p_{ik} \qquad i = 1,\ldots,m \qquad k = 1,\ldots,s$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \quad i = 1,\ldots,m \quad k = 1,\ldots,s \quad j = 1,\ldots,n+1$$

Poprzednio zostało wykazane, że zagadnienie to można rozwiązać znajdując rozwiązania optymalne ze względu na poszczególne asortymenty.

Po rozwiązaniu tego zadania przyjmujemy zgodnie z (17)

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{ijk}$$

Wpłynęło do Redakcji 17.V.68 r.

LITERATURA

[1] Judin D.B., Golsztejn E.G.: Metody programowania liniowego (tłum. z ros.) Warszawa 1964 r.

[2] Dantzig G.: Linejnoje programmirowanije jego primienienija i oboszczenija (tłum. z ang.) Moskwa 1966 r.

[3] Golsztejn E.G., Judin D.B.: Nowyje naprawlenija w liniejnom programmirowanii. Moskwa 1966 r.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОДНОВРЕМЕННОЙ МИНИМИЗАЦИИ ИЗДЕРЖЕК ПРОИЗВОДСТВА И ТРАНСПОРТА НЕОДНОРОДНЫХ ПРОДУКТОВ

Р е з ю м е

В представленной работе доказана возможность решения задачи минимизации издержек транспорта неоднородных продуктов путем очередной минимизации издержек транспорта отдельных ассортиментов.

Здесь представлен тоже метод приведения разрешения задачи одновременной минимизации издержек производства и транспорта неоднородных продуктов к s-кратному решению классической транспортной задачи.

THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF SIMULTANEOUS MINIMIZATION OF BOTH THE COSTS OF PRODUCTION AND TRANSPORTATION OF THE VARIOUS GOODS

S u m m a r y

The article substantiates the possibility of the solution of the problem of minimization of transportation of the various goods by a successive minimization of transportation of individual assortments.

The means of replacement of the solution of the problem of simultaneous minimization of the costs of production and transportation of the various goods multiple solution of the classical transport problem has also been given.