ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 14 Nr kol. 243

WŁADYSŁAW MORYTKO, ZYGMUNT PASZEK
Katedra Matematyki D

O RÓWNANIU ŁAMANEJ

Celem niniejszej notatki jest wyprowadzenie wzoru postaci $y = f(x)$ dla funkcji przedziałami liniowej, której obrazem jest łamana o danych wierzchołkach $P_1(a_1,b_1),\ldots,P_n(a_n,b_n)$.

Wyniki te mogą mieć zastosowanie do konstruowania równania krzywej empirycznej, a także w zagadnieniach aproksymacji.

Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 1

Jeżeli dane są punkty $P_i(a_i,b_i)$, gdzie $i = 0,1,\ldots,n+1$, gdzie $a_o < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona funkcja postaci

$$y = \alpha_o x + \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \alpha_i + \alpha_{n+1} \tag{1}$$

której obrazem jest łamana o wierzchołkach w punktach $P_1,P_2,\ldots,P_n$, gdzie współczynniki α_i są wyznaczone przez współrzędne punktów P_i.

Półproste P_1P_o i P_nP_{n+1} będziemy nazywać ramionami łamanej.

Dowód:

Jeżeli do wzoru (1) podstawimy za x kolejno $a_o,\ldots,a_{n+1}$ i uwzględnimy, że $f(a_i) = b_i$, $i = 0,1,\ldots,n,n+1$, to otrzymamy układ $n+2$ równań o $n+2$ niewiadomych:

$$\alpha_o a_o + \alpha_1 |a_o - a_1| + \alpha_2 |a_o - a_2| + \dots + \alpha_n |a_o - a_n| + \alpha_{n+1} = b_o$$

$$\alpha_o a_1 + \alpha_1 |a_1 - a_1| + \alpha_2 |a_1 - a_2| + \dots + \alpha_n |a_1 - a_n| + \alpha_{n+1} = b_1$$

$$\alpha_o a_2 + \alpha_1 |a_2 - a_1| + \alpha_2 |a_2 - a_2| + \dots + \alpha_n |a_2 - a_n| + \alpha_{n+1} = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_o a_n + \alpha_1 |a_n - a_1| + \alpha_2 |a_n - a_2| + \dots + \alpha_n |a_n - a_n| + \alpha_{n+1} = b_n$$

$$\alpha_o a_{n+1} - \alpha_1 |a_{n+1} - a_1| + \alpha_2 |a_{n+1} - a_2| + \dots + \alpha_n |a_{n+1} - a_n| + \alpha_{n+1} = b_{n+1} \tag{2}$$

Ponieważ $a_o < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}$ więc

$$|a_k - a_i| = \begin{cases} a_k - a_i & \text{gdy } k > i \\ a_i - a_k & \text{gdy } k < i \end{cases}$$

zatem układ przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
a_o\alpha_o + (a_1 - a_o)\alpha_1 + \dots + (a_n - a_o)\,\alpha_n + \alpha_{n+1} &= b_o \\
a_1\alpha_o + (a_1 - a_1)\alpha_1 + \dots + (a_n - a_o)\,\alpha_n + \alpha_{n+1} &= b_1 \\
a_2\alpha_o + (a_2 - a_1)\alpha_1 + \dots + (a_n - a_2)\,\alpha_n + \alpha_{n+1} &= b_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_n\alpha_o + (a_n - a_1)\alpha_1 + \dots + (a_n - a_n)\,\alpha_n + \alpha_{n+1} &= b_n \\
a_{n+1}\alpha_o + (a_{n+1} - a_1)\alpha_1 + \dots + (a_{n+1} - a_n)\,\alpha_n + \alpha_{n+1} &= b_{n+1}
\end{aligned} \tag{2'}$$

Wyznacznikiem tego układu jest:

$$D = \begin{vmatrix} a_o, a_1-a_o, \ldots, a_n-a_o, 1 \\ a_1, \quad 0 \quad, \ldots, a_n, a_1, 1 \\ a_2, a_2-a_1, \ldots, a_n-a_2, 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n, a_n-a_1, \ldots, \quad 0 \quad, 1 \\ a_{n+1}, a_{n+1}-a_1, \ldots, a_{n+1}-a_n, 1 \end{vmatrix}$$

Mnożąc ostatnią kolumnę kolejno przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i dodając odpowiednio do 2, 3,..., n+1 otrzymamy

$$D = \begin{vmatrix} a_o, 2a_1-a_o, 2a_2-a_o, \ldots, 2a_n-a_o, 1 \\ a_1, \quad a_1, \quad 2a_2-a_1, \ldots, 2a_n-a_1, 1 \\ a_2, \quad a_2, \quad a_2 \quad, \ldots, 2a_n-a_2, 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n, \quad a_n, \quad a_n, \quad, \ldots, \quad a_n \quad, 1 \\ a_{n+1}, \quad a_{n+1}, \quad a_{n+1}, \ldots, \quad a_{n+1}, 1 \end{vmatrix}$$

Po dodaniu 1 kolumny kolejno do drugiej, trzeciej,..., n+1 i po wyłączeniu wspólnych czynników przed wyznacznik otrzymamy:

$$D = 2^n \cdot \begin{vmatrix} a_o, & a_1, & a_2, & \dots, & a_n, & 1 \\ a_1, & a_1, & a_2, & \dots, & a_n, & 1 \\ a_2, & a_2, & a_2, & \dots, & a_n, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & a_n, & a_n, & \dots, & a_n, & 1 \\ a_{n+1}, & a_{n+1}, & a_{n+1}, & \dots, & a_{n+1}, & 1 \end{vmatrix}$$

Odejmując 1 wiersz kolejno od 2, 3, ..., n+2 otrzymamy:

$$D = 2^n \cdot \begin{vmatrix} a_o, & a_1, & a_2, & \dots, & a_n, & 1 \\ a_1-a_o, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ a_2-a_o, & a_2-a_1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_o, & a_n-a_1, & a_n-a_2, & \dots, & 0, & 0 \\ a_{n+1}-a_o, & a_{n+1}-a_1, & a_{n+1}-a_2, & \dots & a_{n+1}-a_n, & 0 \end{vmatrix}$$

Gdy wyznacznik ten rozwiniemy według ostatniej kolumny, to otrzymamy:

$$D = (-1)^{n+3} \cdot 2^n \cdot \begin{vmatrix} a_1-a_o, & 0, & \dots, & 0 \\ a_2-a_o, & a_2-a_1, & \dots, & 0 \\ a_3-a_o, & a_3-a_1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_o, & a_n-a_1, & \dots, & 0 \\ a_{n+1}-a_o, & a_{n+1}-a_1, & \dots, & a_{n+1}-a_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+3} \cdot 2^n \cdot (a_1-a_o) \cdot (a_2-a_1) \cdot (a_3-a_2) \dots (a_{n+1}-a_n)$$

Ponieważ wszystkie a_i są od siebie różne, wiec $D \neq 0$, zatem układ (2) względnie (2') jest układem oznaczonym, czyli współczynniki α_i funkcji (1) są wyznaczone jednoznacznie.

Pożądane jest wyrażenie współczynników α_i przez współczynniki kierunkowe k_i odcinków i ramion łamanej, których równania mają postać:

$$y = k_o x + p_o \quad \text{dla} \quad x \in I_o = (-\infty, a_1]$$

$$y = k_1 x + p_1 \quad \text{dla} \quad x \in I_1 = [a_1, a_2]$$

.....

$$y = k_{n-1} x + p_{n-1} \quad \text{dla} \quad x \in I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$$

$$y = k_n x + p_n \quad \text{dla} \quad x \in I_n = [a_n, +\infty)$$

Funkcja (1) w każdym z przedziałów I_i jest identyczna z odpowiednią funkcją $y = k_i x + p_i$. Biorąc pod uwagę to, że dla $x \in I_i$ $i = 0,1,2,\ldots,n$ jest:

$$|x - a_k| = \begin{cases} x - a_k & \text{gdy} \quad k \leqslant i \\ -(x - a_k) & \text{gdy} \quad k > i \end{cases}$$

możemy funkcje (1) napisać w postaci:

$$y = \alpha_o x + \alpha_1(x-a_1) + \ldots + \alpha_i(x-a_i) - \alpha_{i+1}(x-a_{i+1}) - \ldots - \alpha_n(x-a_n) + \alpha_{n+1} = k_i x + p_i \tag{3}$$

dla $x \in I_i$ $i=0,1,2,\ldots,n$.

Porównując współczynniki kątowe obydwu stron (3) otrzymamy układ n+1 równań o n+1 niewiadomych:

$$\alpha_o - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = k_o$$
$$\alpha_o + \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = k_1$$
$$\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = k_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k_n$$

Gdy równanie 1 dodamy stronami do ostatniego otrzymamy:

$$2\alpha_o = k_o + k_n, \quad \text{skąd} \quad \alpha_o = \frac{1}{2}(k_o + k_n) \tag{4}$$

Gdy równanie 1 odejmiemy stronami od drugiego to otrzymamy:

$$2\alpha_1 = k_1 - k_o \quad \text{skąd} \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}(k_1 - k_o) \tag{5}$$

Gdy wreszcie i-te równanie odejmiemy od i+1 to otrzymamy:

$$2\alpha_i = k_i - k_{i-1} \quad \text{skąd} \quad \alpha_i = \frac{1}{2}(k_i - k_{i-1}) \text{ dla } i=2,3,\ldots,n \tag{6}$$

Porównując wyrazy wolne obu stron (3) dla i=0 oraz dla i=n otrzymamy:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} = p_o \quad \text{gdy} \quad i=0$$

$$-\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} = p_n \quad \text{gdy} \quad i=n,$$

skąd po dodaniu stronami tych równań i podzieleniu przez 2 dostaniemy:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(p_o + p_n). \tag{7}$$

Zatem współczynniki α_i $i = 0,1,\ldots,n+1$ funkcji (1) są określone wzorami (4)-(7).

Wyniki powyższych rozważań możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2

Jeżeli dane są współczynniki kątowe $k_1,\ldots,k_n$ łamanej o wierzchołkach w punktach $P_1(a_1,b_1),\ldots,P_n(a_n,b_n)$ i współczynniki kątowe k_o i k_n ramion łamanej, oraz rzędne początkowe p_o i p_n tych ramion, to łamana ta jest wykresem funkcji:

$$y = \frac{1}{2}(k_o+k_n) \cdot x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_i-k_{i-1}) \cdot |x-a_i| + \frac{1}{2}(p_o+p_n)$$

Otrzymany wynik zmienia się nieco, gdy różnice a_i-a_{i-1} są wszystkie równe. Oznaczmy je przez h, wówczas

$$k_i = \frac{1}{h}(b_{i+1}-b_i) \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots n$$

i wtedy:

$$\alpha_o = \frac{1}{2h}(b_{n+1}-b_n+b_1-b_o)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2h}(b_{i+1}-2b_i+b_{i-1}) \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2h}\left(\begin{vmatrix} a_1, a_o \\ b_1, b_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{n+1}, a_n \\ b_{n+1}, b_n \end{vmatrix}\right).$$

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1968 r.

ОБ УРАВНЕНИ ДИАГРАММЫ ЛОМАНОЙ ЛИНИИ

Р е з ю м е

В работе приведено способ выведения формулы типа $y = f(x)$ для кусочно-линейной функции о данных вершинах.

Доказано, что если искомая функция имеет вид (I), тогда коэффициенты принимают форму: (4) - (7).

ÜBER DIE DIAGRAMMGLEICHUNG DER GEBROCHENEN KURVE

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit wird die Ableitungsmethode der Formel $y = f(x)$ für die lineare Funktion bei angegebenen Punkten dargestellt.

Es ist festgestellt worde, dass wenn die gesuchte Funktion in der Form (1) auftritt, dann werden die Koeffizienten durch die Formeln: (4)-(7) ausgedrückt.