ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 14 Nr kol. 243

JAN KUBIK
Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów

O PEWNEJ KLASIE PRAWIE LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWYCH

W pracy rozpatruje się niejednorodne równanie różniczkowo-całkowe w którym część różniczkowa jest o stałych współczynnikach, zaś część całkowa - typu Voltery ma jądro typu splotu:

$$\mathcal{L}_0\, y + \sum_{(i)} \beta_i\, \mathcal{L}_i\, y\, H\,(D_i^{n_i} y) = g,$$

które będziemy dalej nazywali prawie liniowym.
Podaje się sposób wyznaczania całki dla tej klasy równań w oparciu o pewne całki równań liniowych uzyskanych z tego równania.

Niech A oznacza zbiór liniowych operatorów różniczkowo-całkowych, (R^*) będzie ciałem liczb rzeczywistych, (I) zbiorem indeksów. Litery a,b,... będą przebiegały zbiór indeksów I, zaś greckie $\alpha, \beta, \ldots$ będą należały do (R^*).

$$\mathcal{L}_i,\ \mathcal{L}_j \in A \quad i,j,k,\ldots \in I \quad \alpha,\beta,\ldots, \in R^* \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_i\,(\alpha f) = \alpha \mathcal{L}_i\, f$$

$$\mathcal{L}_i\,(f_1 + \ldots + f_n) = \mathcal{L}_i\, f_1 + \mathcal{L}_i\, f_2 + \ldots + \mathcal{L}_i\, f_n$$

$$f_n = f_n(x) \qquad x = \{x : \alpha \leqslant x \leqslant \psi\}$$

niekoniecznie komutatywnych $(\mathcal{E}_i\ \mathcal{E}_j\ (f) \neq \mathcal{E}_j\ \mathcal{E}_i\ (f))$ których postać ogólna jest następującą:

$$\mathcal{E}_i \equiv \alpha_{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{ni}} + \alpha_{(n-1)i} \frac{d^{(n-1)i}}{dx^{(n-1)i}} + \ldots\ldots + K(x-s) * \tag{2}$$

gdzie symbol $*$ oznacza

$$K(x-s) * g(x) \overset{dt}{=} \int_{\alpha}^{x} K(x-s)\ g(s)\ ds \tag{3}$$

lub też:

$$\mathcal{E}_i \equiv \alpha_{ni}\ D^{ni} + \alpha(n-1)i\ D^{(n-1)i} + \ldots + K(x-s)* \tag{4}$$

gdzie:

$$D^{ni} \equiv \frac{d^{ni}}{dx^{ni}} \tag{5}$$

dalej korzystać będziemy z zapisu operatora $\mathcal{E}_i$ w postaci (4).

Jądro $K(x-s)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej, zmiennych x,s, określonej na kwadracie $\alpha \leqslant x,\ s \leqslant \beta$, α i β są ograniczone. Jeżeli jądro $K(x,s)$ jest nieciągłe, to należy wymagać aby:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} \left| K(x,s) \right|^2 dx\ ds < M \tag{6}$$

gdzie M jest dowolną stałą ograniczoną wielkością.

Będziemy rozpatrywali następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$\mathcal{L}_o y + \sum_{(i)} \mathcal{L}_i y \quad H\,(D_i^{ni}\, y) = g \tag{7}$$

w którym:

$$y = y(x), \quad g = g(x) \quad g \in C^K \quad x = \left\{ x : o \leqslant x \leqslant \psi \right\} \tag{8}$$

są funkcjami zmiennej rzeczywistej x.
Z następującymi warunkami brzegowymi:

$$L^{(n_1)} y(x) \Big|_{x=o} = \lambda_o; \qquad L^{(n2)} y(x) \Big|_{x=\psi} = \lambda_\psi \tag{9}$$

$$n_1 + n_2 = n \qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots\ k$$

tutaj k jest rzędem równania (7), natomiast $H(D_i^{n_i} y)$ jest superpozycją szukanej funkcji $y(x)$ z dystrybucją Heaviside'a:

$$H\,(D_i^{n_i} y) \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad D_i^{n_i} y \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad D_i^{n_i} y < 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$H(D_i^{n_i} y) \in \mathcal{H}_i$$

$\mathcal{H}_i$ będzie zbiorem dystrybucji określonych zależnością (10)

Wobec relacji (10) musi zachodzić

$$\left| D_i^{n_i} y \right| < M \qquad i \not\forall I \qquad n_i = 0,1,2,\ldots, k-1 \tag{11}$$

Wydzielmy z równania (7) część liniową oraz nieliniową, związaną z wyrażeniem (10).
Biorąc pod uwagę (10) zapiszemy równanie (7), dla przypadku $i = 1$, w postaci dualnego układu równań:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_o y - \mathcal{L}_1 y - g) \quad H(D_1^{n_i} y) = 0 \\ &(\mathcal{L}_o \bar{y} \quad - \quad g) \quad H(-D_1^{n_i} y) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Ogólnie, sposób tu przytoczony rozbija równanie (7) na ciąg dualnych układów równań:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_o y + \mathcal{L}_1 y + \mathcal{L}_2 y + \ldots + \mathcal{L}_i y - \mathcal{L}_p y - \mathcal{L}_{p+1} y - \ldots - \mathcal{L}_{iy} - g) \cdot \\ &\qquad \prod_{j=1}^{j=p} H_j(D_j^{n_i} y) \prod_{j=p}^{j=i} H_j(-D_j^{n_j} y) = 0 \\ &(\mathcal{L}_o \bar{y} + \mathcal{L}_1 \bar{y} + \ldots + \mathcal{L}_i \bar{y} - \mathcal{L}_{p\bar{y}} - \mathcal{L}_{p+1} \bar{y} - \ldots - \mathcal{L}_{t-1} \bar{y} + \mathcal{L}_t \bar{y} + \\ &\qquad + \mathcal{L}_{t+1} \bar{y} + \ldots + \mathcal{L}_1 \bar{y} - g) \cdot \\ &\qquad \cdot \prod_{j=1}^{j=p} H_j (D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=p}^{j=t} H_j (-D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=t}^{j=i} H_j(D_j^{n_j} \bar{y}) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

przy czym zachodzi:

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_p \cup \mathcal{H}_{i-p}, \quad \mathcal{H}_{i-p} = \mathcal{H}_{t-p} \cup \mathcal{H}_{i-t} \tag{14}$$

Układ (13) posiada dwa skrajne przypadki szczególne:

$$(\ell_o y + \ell_1 y + \ell_2 y + \ldots + \ell_i y - g) \prod_{j=1}^{j=i} H_j(D_j^{n_j} y) = 0$$

$$(\ell_o \bar{y} - g) \prod_{j=1}^{j=i} H_j(-D_j^{n_j} \bar{y}) = 0 \qquad (15)$$

$$i \quad j = 0$$

wynikające z układu równań (13) dla $j = 1,2, \ldots p$

Rozwiązaniem układu równań (12) w klasie funkcji nieciągłych $K(R^*)$ $y \in K$ będzie wyrażenie:

$$y = y \cdot H(D_1^{n_i} y) + \bar{y} \cdot H(-D_1^{n_1} \bar{y}) \qquad (16)$$

gdzie:

y - jest całką równania:

$$\ell_o y + \ell_1 y - g = 0 \qquad (17)$$

a $\bar{y}$ równania:

$$\ell_o \bar{y} - g = 0 \qquad (18)$$

Oznaczmy przez y_i całkę równania:

$$\ell_o y + \ell_1 y + \ell_2 y + \ldots + \ell_i y - \ell_p y - \ell_{p+1} y - \ldots \ell_i y - g = 0 \qquad (19)$$

a przez $\bar{y}_i$ całkę równania:

$$\ell_o \bar{y} + \ell_1 \bar{y} + \ell_2 \bar{y} + \ldots + \ell_i \bar{y} - \ell_p \bar{y} - \ell_{p+1} \bar{y} - \ldots - \ell_{t-1} \bar{y}$$

$$+ \ell_t \bar{y} + \ell_{t+1} \bar{y} + \ldots + \ell_i \bar{y} - g = 0 \qquad (20)$$

Rozwiązaniem układu równań (13) w klasie funkcji nieciągłych $y \in K$ będzie każda z kombinacji:

$$y = y_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j (D_j^{n_j} y) \prod_{j=p}^{j=i} H_j (-D_j^{n_j} y) + \bar{y}_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j (D_j^{n_j} \bar{y}) \tag{21}$$

$$\prod_{j=p}^{j=t} H_j (-D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=t}^{j=i} H_j (+D_j^{n_j} \bar{y})$$

Wobec ich niezależności suma wszystkich rozwiązań, czy też części równań (13) będzie również rozwiązaniem $y \in K$:

$$y = \sum y_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j (D_j^{n_j} y) \prod_{j=p}^{j=i} H_j (D_j^{n_j} y) + \tag{22}$$

$$+ \bar{y}_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j (D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=p}^{j=t} H_j (-D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=t}^{j=i} H_j (D_j^{n_j} \bar{y})$$

Rozwiązania (21) i (22) są podane w postaci uwikłanej. Poszukiwanie rozwiązań w klasie funkcji ciągłych poprzedzi:

Lemmat 1

Jeżeli $y_1, y_2, \ldots, y, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}$ są funkcjami klasy C^K wówczas jedynymi miejscami nieciągłości rozwiązań (21), (22) są punkty zbioru x będące nietrywialnymi rozwiązaniami równania funkcyjnego:

$$\prod_{j=1}^{j=t} \delta_j (D_j^{n_j} y) \prod_{j=p}^{j=i} \delta_j (-D_j^{n_j} y) = \prod_{j=1}^{j=p} \delta_j (D_j^{n_j} \bar{y}) \prod_{j=p}^{j=t} \delta_j (-D_j^{n_j} \bar{y}) \tag{23}$$

$$\prod_{j=t}^{j=i} \delta_j (D_j^{n_j} \bar{y})$$

czyli:

$$\prod_{j=t}^{j=i} \delta_j \left(-D_j^{n_j} y\right) = \prod_{j=t}^{j=i} \delta_j \left(+D_j^{n_j} \bar{y}\right) \tag{24}$$

tzn. takie punkty $x_a \in X$, $\bar{x}_a \in \bar{X}$, że

$$\int_{(A)} \prod_{j=t}^{j=i} \delta_j \left(-D_j^{n_j} y(x_a)\right) dx = \int_{(A)} \prod_{j=t}^{j=i} \delta_j \left(D_j^{n_j} \bar{y}(x_a)\right) dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 = 1 \tag{25}$$

$$x_a \in A \qquad A \subseteq X \qquad \bar{x}_a \in \bar{A} \qquad \bar{A} \subseteq \bar{X}$$

tutaj $\delta(\ )$ oznacza superpozycję δ - Diraca z $D_j^{n_j} y$.

Zależność ta może być zapisana następująco [2], [3]:

$$\delta(D_j^{n_j} y) = \delta(x - x_1) + \delta(x - x_2) + \ldots + \delta(x - x_a) =$$

$$= \sum_{(a)} \delta(x - x_a) \tag{26}$$

gdzie x_a jest rozwiązaniem równania $D_j^{n_j} y(x) = 0$.

Wówczas zależność (25) przyjmie postać:

$$\int_{(A)} \sum_{(a)} \delta(x - x_a) dx = \int_{(\bar{A})} \sum_{(a)} \delta(\bar{x} - \bar{x}_a)\, dx \Longrightarrow 1 = 1 \tag{27}$$

Rzeczywiście, jeżeli $y_1, \ldots, \bar{y}_1, \ldots\ C^K$ wtedy dla

$$D_1^{n_1} y \geqslant 0, \quad D_2^{n_2} y \geqslant 0, \ldots, \quad D_j^{n_j} y \geqslant 0, \quad D_{p+1}^{n_{p+1}} y \leqslant 0, \ldots$$

$$\ldots\ D_i^{n_i} y \leqslant 0 \tag{28}$$

$$y_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j\,(D_j^{n_j}\, y) \prod_{j=p+1}^{j=i} H_j\,(-D_j^{n_j}\, y) = y_j$$

a dla

$$D_1^{n_1} y \geqslant 0, \quad D_2^{n_2} y > 0, \ \ldots, \quad D_j^{n_j} y \geqslant 0, \quad D_{p+1}^{n_{p+1}} y \leqslant 0,$$

$$D_i^{n_i} y \leqslant 0, \quad D_{p+2}^{n_{p+2}} y \geqslant 0$$

$$y_j \prod_{j=1}^{j=p} H_j\,(D_j^{n_j}\, y) \prod_{j=p+1}^{j=i} H_j\,(-D_j^{n_j}\, y) = 0 \tag{28}$$

wówczas punkty x_a są jedynymi punktami nieciągłości.

Twierdzenie

Y jest całką równania (7) należącą do C^K ($y \in C^K$) jeżeli zostaną spełnione warunki:

$$D^n y \Big|_{x=x_a} = D^n \bar{y} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_a} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, k \tag{29}$$

w punktach x_a spełniających zależności (27) oraz $y_1, \ldots, \bar{y}_1, \ldots \in C^K$

Dowód wynika natychmiast z lematu 1.

Warunek brzegowy (10) wraz z warunkami ciągłości (29) prowadzą do nieliniowego układu równań algebraicznych, w których jako niewiadome wystąpią stałe całkowania, wartości pochodnych w miejscach $x = 0$, $x = \psi$, oraz punkty $x = x_a$ (graniczne przedziałów ciągłości). Postać tego układu równań jest następująca:

$$L^{(n)}y(x)\Big|_{x=o} = \lambda_o, \qquad L^{(n)}y(x)\Big|_{x=\psi} = \lambda_\psi$$

$$D^i\,\bar{y}(x)\Big|_{x=\bar{x}_a} = D^i y(x)\Big|_{x=x_a} \qquad i = 0,1,2,\ldots,k-1 \quad (30)$$

$$D^{n_j}\,y\,(x)\Big|_{x=x_a} = 0$$

Jak łatwo stwierdzić w każdym układzie ilość równań odpowiada liczbie niewiadomych.

Podane równanie stanowi uogólnienie równań, do jakich prowadzą niektóre nowsze zagadnienia mechaniki ośrodka odkształcalnego. Oczywiście, podane w pracy wyniki zostały zawężone do zagadnień "jednowymiarowych".

Wpłynęło do Redakcji w maju 1968 r.

LITERATURA

[1] Bellman R. i Cooke K.L. - Differential - difference equations - Academic Press - N. York, London 1963 r.

[2] Mikusiński J., Sikorski R. - Elementarny wstęp do teorii dystrybucji, PWN Warszawa 1965 r.

[3] Гелфанд И.М., Шилов Г.Е. - Обобщенные функции и действа над ними. Москва 1958 г.

[4] Faure R., Kaufmann A., Denis - Papin M. - Mathematiques Nouvelles T. F - Dunod, Paris 1964 r.

НЕКОТОРЫЙ КЛАСС ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛНО-ИНТЕГРАЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представляется неоднородное дифференциально-интегралное уравнение о постоянных коэффицентах. Введено пространство линейных операторов A, с помощю которых получено более общие результаты. В уравнениях этой статьи существует слабая нелинейнсть связана с обобщенной функцией ХЕВИСАЙДА H(y). В работе дан метод решения этих уравнений (лемма I и теорема I). Теорема связана с особенностями решения.

ON A CLASS OF QUASI-LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

This work deals with the integro-differential equations with constant coefficients. Linear space operators have been introduced to enable a more general application. Some non-linear phenomena in the equations are attributable to Heaviside theory of distribution. A method of integral calculus is shown, based on the first lemma of this paper.

In treatment of this lemma, a formulation of a principle takes place which has a basic meaning in the shown method of integral calculus. The principle is applicable to this particular solution of the problem.