ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

PROBLEMATYKA BADAŃ NAUKOWYCH KATEDRY MATEMATYKI STOSOWANEJ

1. Zespół równań różniczkowych (opracował Cz. Kluczny)

Zespół zachował zasadniczą tematykę z minionego okresu i zgłosił do planu NT na lata 1971-75 temat: Metody badania własności asymptotycznych rozwiązań równań różniczkowych i ich zastosowania Podstawą tych badań są prace autora niniejszego opracowania dotyczące ogólnych metod badania własności asymptotycznych pewnych rodzin krzywych obejmujących nie tylko całki równań różniczkowych zwyczajnych, ale także - co jest ważne dla dalszego ciągu - rozwiązania równań kotyngensowych oraz praca przedstawiająca pewne warunki stabilności o charakterze jakościowym dla równania różniczkowego drugiego rzędu. Ponadto w obręb zainteresowań grupy weszły zagadnienia sterowania. Nie zdążyliśmy z redakcją artykułu z tej dziedziny do niniejszego zeszytu, dlatego pozwolę sobie nieco obszerniej omówić prace i zamierzenia grupy w tym kierunku.

Mamy na warsztacie dwa zagadnienia. W jednym chodzi o opracowanie nowej metody obliczeniowej, na razie w zastosowaniu tylko do układów liniowych ze sterowaniem czasowo optymalnym. Pewne zadania potrafimy rozwiązać w sposób, który nie wykorzystuje ani zasady maksimum Pantriagina ani metody programowania dynamicznego Bellmana i koniec końców sprowadza się do rozwiązania pewnych układów równań algebraicznych i nierówności. Równania te oczywiście tylko w najprostszych przypadkach są łatwe do rozwiązania, w innych wymagają zastosowania metod przybliżonych i w konsekwencji możemy otrzymać tylko rozwiązania przybliżone. Trudności tego rodzaju nie dają się jednak ominąć i przy stosowaniu którejkolwiek z metod znanych. Inną wyraźnie odróżniającą cechą jest, że rozwiązanie wspomnianych równań daje od razu optymalny czas i momenty przełączeń, pomijając wyznaczanie trajektorii optymalnej. W wielu zastosowaniach wyznaczanie trajektorii nie ma znaczenia i wtedy nasza metoda będzie ekonomiczniejsza. Wyznaczenie trajektorii optymalnej, jeżeli jest potrzebne, nie przedstawia już zresztą trudności. Oczywiście, że w tej metodzie, jak zaznaczyliśmy - obliczeniowej, korzystamy ze znanych twierdzeń o ilości przełączeń itp., chociaż samo istnienie lub brak rozwiązania jest rozstrzygnięty przez istnienie lub brak rozwiązania wspomnianych równań i nierówności.

Drugie zagadnienie jest natury teoretycznej. Istnieją różne metody ogólnego traktowania zagadnień sterowania. Metoda pola orientorowego, której autorem jest T. Ważewski, stawia podstawy problemu bardzo ogólnie.

Jeżeli $N(t, x)$ - orientor - oznacza zbiór kierunków v takich, że

$$v = f(t, x, u), \quad u \in U .$$

gdzie:

U - oznacza dziedzinę sterowania, która może się zmieniać z czasem, to związek

$$\dot{x}(t) \in N(t, x) \qquad (*)$$

jest równaniem kotyngensowym, o którym już wcześniej wspominaliśmy. Zbiór $\mathcal{E}(t_0, x_0)$ punktów (t, x) leżących na półcałkach prawych równania $(*)$ wychodzących z (t_0, x_0) nazywamy emisją punktu

(t_0, x_0). Brzeg zbioru $\mathcal{E}(t_0, x_0)$ oznaczamy zwykle przez $B(t_0, x_0)$, a przecięcie płaszczyzną $t = \tau$ przez $\mathcal{E}(t_0, x_0, \tau)$ lub krócej $\mathcal{E}(\tau)$. Jest oczywiste, że wyznaczenie optymalnego czasu przy sterowaniu z punktu (t_0, x_0) do punktu (τ, x_1) - (τ nie oznaczone) jest równoznaczne z wyznaczeniem pierwszego punktu przecięcia się półprostej $x = x_1$, $t \geqslant t_0$ ze zbiorem $B(t_0, x_0)$, a na to, by ten punkt przecięcia mógł być osiągnięty, trzeba by $B(t_0, x_0) \subset \mathcal{E}(t_0, x_0)$ czyli by emisja $\mathcal{E}(t_0, x_0)$ dla $t \leqslant \tau$, τ dowolne była zbiorem zwartym. Jeżeli za zbiór sterowań dopuszczalnych przyjmiemy zbiór funkcji ciągłych R o wartościach z U, to emisja na ogół nie będzie zwarta. Można ją uczynić zwartą przez rozszerzenie zbioru R do zbioru powiedzmy G przy czym dziedzina sterowań może się powiększyć z U na V. Oznaczmy emisję z (t_0, x_0) przy zbiorze dopuszczalnym G przez $\tilde{\mathcal{E}}(t_0, x_0)$. Zbiór ten może być identyczny z domknięciem zbioru $\mathcal{E}(t_0, x_0)$ lub zawierać go jako część właściwą. Jeżeli zachodzi pierwszy przypadek, to często zbiór G można będzie zastąpić przez jego podzbiór H z dziedziną V o tej samej emisji $\mathcal{E}(t_0, x_0)$. Wtedy rozwiązanie zadania wyjściowego z rodziną sterowań dopuszczalnych R o wartościach z U można zastąpić przez to samo zadanie przy rodzinie sterowań dopuszczalnych H z wartościami z V. W tym, co powiedzieliśmy, mieści się nie sprecyzowany opis sposobu, w jaki zamierzamy podchodzić do tych zagadnień. W dalszym ciągu zauważamy, że dla zwartości emisji $\mathcal{E}(t_0, x_0)$, $t \leqslant T$ wystarczy, by zbiór $\mathcal{E}(\tau)$ był zwarty dla każdego $\tau \leqslant T$, a ponieważ punkt przecięcia się prostej $x = x_1$ ze zbiorem $B(t_0, x_0)$ leży na brzegu $B(t_1)$, to istotną dla dalszych rozważań sprawą jest wyznaczenie podzbioru $h(\tau)$ zbioru sterowań H, którym można osiągnąć brzeg $B(\tau)$ zbioru $\mathcal{E}(\tau)$ (brzeg względem płaszczyzny $t = \tau$). Zauważmy, że jeżeli $h(\tau)$ nie zależy od τ, to oznacza, że rozwiązań optymalnych (czasowo) wystarczy szukać na brzegu emisji. Rezygnując z dalszego rozwijania i precyzowania naszego podejścia do zagadnień sterowania zilustrujmy prostym przykładem to, co zostało wyżej powiedziane.

Dany jest układ równań różniczkowych

$$\dot{x} = u \quad \dot{y} = u^2 \quad |u| \leqslant 1$$

Chodzi o sterowanie czasowo optymalne, które sprowadza punkt (o, x^o) do (t_1, o).

Rodzina R jest rodziną sterowań ciągłych o wartościach na łuku paraboli

$$L: \quad y = x^2 \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Przy przyjętych oznaczeniach G jest rodziną sterowań przedziałami ciągłych o wartościach z V: $x^2 \leqslant y \leqslant 1$, $h(\tau)$ rodzina sterowań stałych o wartościach z L oraz sterowania z jedną zmianą o wartościach w końcach łuku L. W ten sposób zadanie początkowe zostało sprowadzone do zadania prostszego.

W tym zeszycie zespół drukuje trzy prace z równań różniczkowych, jedna z zagadnień asymptotycznych dotyczy istnienia całki okresowej równania drugiego rzędu, (do planu NT), druga równania Van der Pola z wymuszeniem stochastycznym, trzecia jest krótkim ujęciem wyników zakończonej niedawno rozprawy doktorskiej, a ponadto pracę z Ośrodka Maszyn Matematycznych, która dojrzewała w okresie gdy Ośrodek należał jeszcze do Katedry Matematyki B.

2. Zespół programowania matematycznego (opracował W. Sobieszek)

Operations research, to angielska nazwa dyscypliny nauki, liczącej sobie około 25 lat, którą w języku polskim W. Sadowski nazywa badaniami operacyjnymi, zaś O. Lange - analizą operacji. Stosowniejszą wydaje się być nazwa "badania operacyjne". Badania operacyjne to nazwa dyscypliny nauki zajmującej się wyznaczaniem, w danych warunkach, optymalnej decyzji z punktu widzenia zadanego kryterium optymalności. Ogólnie o metodach jakimi posługujemy się w badaniach operacyjnych można powiedzieć, że mają one charakter kwantytatywny tzn. można stosować je do zagadnień dających się ująć ilościowo. Z dyscyplin matematyki którymi posługują się badania operacyjne należy wymienić: rachunek różniczkowy i całkowy, rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną oraz programowanie matematyczne. Najmłodszą z tych dyscyplin jest programowanie matematyczne.

Powstanie programowania matematycznego ściśle wiąże się z powstaniem badań operacyjnych i warunkuje ich rozwój. W książce "Optymalne decyzje" O. Lange wyjaśnia, że programowanie jest częścią nauki o racjonalnym działaniu, czyli prakseologii, zaś programowanie matematyczne stanowi matematyczną teorię stosowania zasady racjonalnego gospodarowania. Z matematycznego punktu widzenia ogólnym zadaniem programowania matematycznego jest problem znalezienia ekstremum funkcji rzeczywistej.

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w pewnym obszarze D.

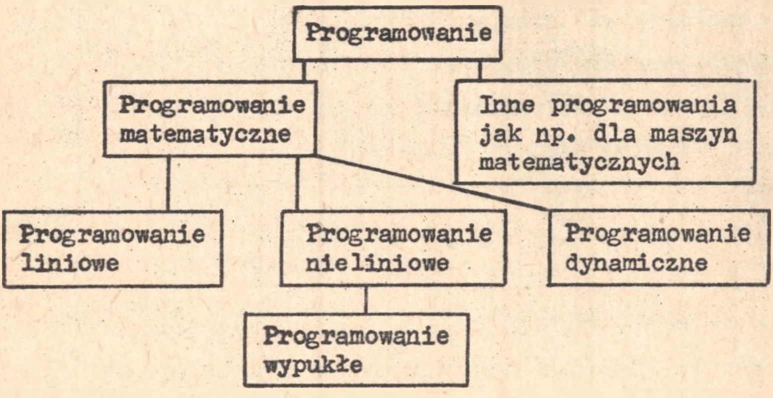
W terminologii badań operacyjnych funkcję $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywa się funkcją kryterium (W. Sadowski) lub funkcją celu (O. Lange), zaś obszar D zwany jest obszarem rozwiązań dopuszczalnych.

Jeżeli w szczególności funkcja kryterium jest liniowa i relacje określające obszar rozwiązań dopuszczalnych też są liniowe, to mamy wówczas do czynienia z tzw. programowaniem liniowym. W przeciwnym wypadku tzn., gdy funkcja kryterium jest nieliniowa lub pewne

relacje określające obszar rozwiązań dopuszczalnych są nieliniowe, mamy do czynienia z programowaniem nieliniowym. W przypadku, gdy funkcja kryterium jest wypukła i obszar rozwiązań dopuszczalnych jest także wypukły, otrzymujemy szczególnie ważny dział programowania nieliniowego tzw. programowanie wypukłe. Specjalną rolę w programowaniu matematycznym odgrywa programowanie dynamiczne.
J. Łoś - problemem planowania dynamicznego nazywa zadanie wyznaczenia ekstremum funkcji

$$F(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gdzie funkcje ciągu $\{F_n\}$ określone są odpowiednio: $F_1(x_1)$ w zbiorze X, $F_2(x_1, x_2)$ - w zbiorze $X^2, \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)$ w zbiorze X^n, zaś obszarem rozwiązań dopuszczalnych jest produkt nieskończony X^{Wo} (Wo - moc zbioru liczb naturalnych).



Problematyka badań naukowych zespołu "Programowanie matematyczne" dotyczy głównie programowania nieliniowego i dynamicznego.
Badania prowadzone są w ramach problematyki objętej planami NT, z jednostką wiodącą - Instytut Matematyczny PAN oraz planem G.P.

W ramach planu 5-letniego NT opracowuje się następujące tematy:

1. Metody sprowadzania zagadnień ekstremalnych warunkowych do problemów planowania dynamicznego

2. Badanie związku pomiędzy problemami planowania dynamicznego, a równaniami funkcyjnymi programowania dynamicznego.

3. Klasyfikacja równań funkcyjnych programowania dynamicznego, pod kątem uogólnienia twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności.

4. Rozbudowa teorii indeksów dynamicznych i horyzontu w planowaniu dynamicznym.

W planie pięcioletnim GP umieszczone są do zrealizowania tematy:

a) zastosowanie programowania dynamicznego do badania inwestycji górniczych

b) optymalizacja transportu dołowego w kopalni węgla kamiennego

c) budowa ekonometrycznego modelu jednostkowych kosztów wydobycia węgla.

Z powyższej problematyki objętej planem NT opracowano drukiem dwa artykuły:

1. O rozwiązaniu równania $f(x) = \max\limits_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f[ay + b(x-y)]\}$ w przypadku funkcji wklęsłych.

2. O niejednoznaczności rozwiązań równania

$$f(x) + \max_{y_1+y_2 \leq x} [g(y_1) + h(g_2) + f(ay_1 + by_2 + x - y_1 - y_2)]$$

Z zakresu planowanych prac GP opublikowano dwa artykuły:

1. Budowa matematycznego modelu optymalizacji transportu dołowego kopalni węgla kamiennego.

2. Budowa ekonometrycznego modelu jednostkowych kosztów wydobycia węgla kamiennego.

3. <u>Zespół Badań Operacyjnych</u> (opracowali: Andrzej Majeran, Janusz Mola, Kazimierz Szałajko)

Głównym tematem planu pracy naukowej zespołu badań operacyjnych jest zagadnienie wysunięte przez Główny Instytut Górnictwa i dotyczące niezawodności systemów technologicznych w kopalniach węgla kamiennego.

Ważną częścią systemu produkcyjnego kopalni jest transport. Transport węgla w kopalni odbywa się początkowo za pośrednictwem przenośników łańcuchowych i taśm do tzw. punktów załadowczych, w których węgiel zostaje załadowany do pociągów kolejki kopalnianej. Następnie kolejką węgiel zostaje odwieziony do szybu, którym wydobywa się go na powierzchnię.

W każdym elemencie tego systemu transportowego występują różnego typu awarie powodujące zatrzymanie pracy całego systemu. Skrócenie czasu trwania awarii jest dlatego bardzo ważnym problemem.

Głównym zagadnieniem, nad którym obecnie pracujemy, jest wyznaczenie zależności pomiędzy średnim czasem trwania awarii a ilością i rozmieszczeniem brygad usuwających te awarie.

Zagadnienie to jest skomplikowane, gdyż proces awarii każdego elementu ciągu transportowego zależy od wielu czynników, takich jak czas pracy elementu, intensywność strumienia węgla itp.

Drugim zagadnieniem, którym zajmuje się część członków naszego zespołu, jest symulacja na maszynie cyfrowej pracy transportu kołowego w kopalni. Zagadnieniem tym zajmujemy się od dłuższego czasu wraz z pracownikami Katedry Zastosowań Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego: doc. dr Józefem Łukaszewiczem i dr Jerzym Kucharczykiem. Program symulujący pracę transportu kopalnianego dla maszyny cyfrowej Elliott 803 powstał w ubiegłych latach i został wykorzystany przez Główny Instytut Górnictwa do badania organizacji transportu w trzech kopalniach.

Obecnie zamierzamy w oparciu o zdobyte doświadczenia udoskonalić ten program i zaprogramować dla maszyny Odra 1204.

W ramach naszego seminarium obok wyżej wymienionych zagadnień zajmujemy się również studiowaniem procesów stochastycznych oraz teorii masowej obsługi i niezawodności.

Należy się spodziewać, że w związku z tym wyłonią się pewne zagadnienia z teorii masowej obsługi, których rozwiązanie podejmiemy.

4. Grupa Teorii Aproksymacji (opracował A. Wakulicz)

I. Zagadnienia z teorii aproksymacji

1° Modyfikacja metody Newtona i rząd zbieżności algorytmów dla układów równań n x n.

a) o pewnej modyfikacji metody Newtona (R. Bartłomiejczyk, artykuł w druku).

b) Wyznaczanie algorytmu o 3 rzędzie zbieżności dla układu

$$\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{matrix} \quad \text{za pomocą układu} \quad \begin{cases} \varphi_{11} f + \varphi_{12} g = 0 \\ \varphi_{21} f + \varphi_{22} g = 0 \end{cases}$$

(praca R. Bartłomiejczyka, przygotowana do druku)

c) Zagadnienie dla układów n x n.

d) Badanie związku otrzymanych wyników z klasycznymi wynikami Kantorowicza oraz z wynikami Altmana (1965 r.).

2° Badanie własności funkcji określonych równaniem Bellmana za pomocą przybliżeń łamanymi wpisanymi.

II. Teoria grafów i zagadnienie transportu

Wiodącym jest tutaj obecnie zagadnienie klasyfikacji grafów. Właściwie każda ze znanych cech grafów może służyć dla takiej kla-

syfikacji. Także algorytm transportu pozwala rozróżnić ciąg coraz bardziej złożonych grafów. Nasuwa się poważny problem wyodrębnienia takiej najprostszej klasy grafów, która by obejmowała ważniejsze zastosowania. Mgr J. Kaczmarski po złożeniu do druku dwóch artykułów wstępnych omawiających własności macierzy unimodularnych i macierzy cyklomatycznej złożył również obszerniejszą pracę proponowaną jako praca doktorska, w której podaje pewien ogólny algorytm dla zagadnienia transportu. Mgr J. Kaczmarski obecnie zajmuje się próbą klasyfikacji grafów w oparciu o pojęcie węzła (krawędzi wspólnej dla cykli) i relacji inkluzji.
Inni pracownicy zajmują się studiami nad różnymi charakterystykami grafów w oparciu o książki Forda Fulkersona i Berge'a. Nasuwa się tutaj szereg prostych zagadnień jak np. zagadnienie przekształcenia do postaci normalnej grafu, który jest płaski np. według kryterium Kuratowskiego.

III. Inne zagadnienia

Twierdzenie o współczynnikach wielomianu $\frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$ gdy p,q liczby pierwsze nieparzyste (praca mgr R. Koby).

5. Zespół Zastosowań Matematyki w Mechanice Ośrodka Ciągłego (opracował S. Borkowski)

Grupa, której charakterystykę tutaj podajemy, jest zespołem młodym, powstałym w wyniku reorganizacji Uczelni, a w szczególności w wyniku scalenia Katedr Matematyki.
Zespół, w skład którego wchodzi 17 pracowników (w tym: 3 wykładowców, 3 stażystów oraz 2 osoby, zajmujące się inną problematyką); realizuje plan swojej działalności naukowej poprzez: seminaria,

wykłady monograficzne, odczyty, udział w Konferencjach naukowych, współpracę w problemach naukowych Katedr innych Wydziałów.

Problematyka badań naukowych koncentruje się na opracowaniu przybliżonych metod obliczeń. Obliczenia te dotyczą jak na razie problemów spotykanych w teorii sprężystości. W szczególności, odnoszą się one do opracowania przybliżonych metod całkowania takich problemów początkowo-brzegowych równań różniczkowych cząstkowych, które są ważne w zastosowaniach. Równolegle podejmowana jest problematyka odnosząca się do zagadnień termosprężystych. Ostatnia dziedzina dotyczy zastosowania metody różnic skończonych do przybliżonego rozwiązywania problemów początkowo-brzegowych (układy równań różniczkowych drugiego rzędu - typ hiperboliczny) oraz brzegowych (niesprzężone pola temperatur i przemieszczeń) dla układów równań różniczkowych typu eliptycznego. W chwili obecnej rozwijane są również badania odnoszące się do zagadnień lepkosprężystych. W związku z tym ostatnim tematem pojawiła się nowa problematyka: zastosowanie teorii grup topologicznych do opisu ruchu ośrodka odkształcalnego, przy wykorzystaniu dosyć wyspecjalizowanego aparatu analizy funkcjonalnej. Wreszcie, ostatnie problemy, to określenie stanów granicznych (teoria plastyczności) przy wykorzystaniu ujęcia typowego dla programowania matematycznego. Taka problematyka prowadzi do, mało zbadanego w sensie matematycznym, programowania nieliniowego.

W zakończeniu podkreślimy te osiągnięcia, które uznać należy za zasługujące na wyeksponowanie.

W ramach pracy społecznej prowadzony jest, pod egidą[x)] Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, wykład monograficzny, pt. "Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych". Wykład ten przeznaczony jest zarówno dla doktorantów Uczelni, jak i Prze-

---

[x)] Mech. Teor. Stos., 3, 7 (1969), 372.

mysłu. Problematyka wykładów odnosi się do najnowszych zagadnień i przedstawiana jest w formie możliwie najogólniejszej, ze szczególnym zwróceniem uwagi na jej aspekty matematyczne. Wykłady te prowadzone są już trzeci semestr, a planowane zakończenie nastąpi w styczniu 1971 r. Równolegle prowadzone są w tym samym trybie seminaria z matematyki stosowanej. Oprócz tej działalności, raz w tygodniu odbywają się seminaria w zespole; na seminariach tych referowana jest problematyka odnosząca się do matematycznych zagadnień mechaniki ośrodka odkształcalnego.

W chwili obecnej zespół współpracuje: z Katedrą Konstrukcji Maszyn Roboczych (Zespół dźwignic i urządzeń transportowych), przy rozwiązywaniu zagadnień jakie pojawiają się przy transporcie przenośnikami taśmowymi; z Katedrą Technologii Chemicznej Węgla i Ropy Naftowej (Instytut Petrochemiczny PAN) przy ocenie statystycznej, hipotezy o współzależności pochodzenia złóż ropy naftowej; z Centralnym Biurem Konstrukcji Maszynowych w Bytomiu, konsultując problemy obliczeń wytrzymałościowych i optymalizacyjnych dźwignic. Bierzemy też udział w IV Konferencji Konstrukcji Metalowych, która odbędzie się w Warszawie, w końcu czerwca br. Na konferencję tę zgłoszono referaty:

1. Niektóre problemy optymalizacji konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu wpływu pola temperatur.
2. Problemy zastosowań elektronicznych maszyn cyfrowych w obliczeniach ustrojów dźwignic.
3. Obliczenia ustrojów ramowych z uwzględnieniem pełzania ośrodka.
4. Obliczenia optymalizacyjne dźwignic z zastosowaniem maszyn cyfrowych.
5. Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji prętowych i płytowych.

W dziedzinie prac teoretycznych, doktoranci - pracujący pod kierunkiem S. Borkowskiego, uzyskali pewne wyniki w zastosowaniu teorii grup topologicznych do opisu ruchu ośrodka odkształcalnego; z tego zakresu jest ukończona praca doktorska, a pięć publikacji znajduje się w druku:

1. Grupy przekształceń ciągłych w ośrodku odkształcalnym (Arch. Mech. Stos., 1970 r.).
2. Równoważność przekształceń ruchów w ośrodku prostym (Arch.Mech. Stos., 1970 r.).
3. Funkcjonały liniowe w ośrodku prostym (Arch.Mech.Stos., 1970 r.
4. Metoda sił - układy lepkosprężyste (Rozpr. Inż., 1970 r.).
5. Metoda przemieszczeń - układy lepkosprężyste (Rozpr.Inż. 1970 r.

Z zastosowania programowania liniowego w teorii stanów granicznych istnieją ukończone prace:

1. Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji (przegląd prac), Mech.Teor.Stos., 1970.
2. Wyznaczanie nośności granicznej łuku kołowego przy pomocy programowania liniowego (Zesz.Nauk.Pol.Śl. "Mechanika", 1970).

Istnieje jedna praca dotycząca rozwiązywania zagadnienia ruchu przekładni falowej:

1. Geometria i kinematyka zazębienia przekładni falowej (komunikat zamieszczamy w niniejszym zeszycie).

Zajmowano się też zagadnieniami minimaksowymi funkcji zmiennych dyskretnych. Z tego zakresu istnieje jedna praca znajdująca się w druku:

2. Pewne kryterium doboru współczynników wzoru aproksymacyjnego (Zesz.Nauk.Pol.Śl. "Matematyka", 1970).

Oprócz tego uzyskano pewne wyniki z rozwiązywania problemów termosprężystości bądź teorii sprężystości:

1. Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1963-1967), Mech.Teor.Stos. 1969.

2. Wpływ momentu skupionego na stan naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej o wzmocnionym brzegu, Mech.Teor.Stos., 1970.
3. Numeryczne rozwiązanie równań termosprężystości, Rozpr. Inż. 1970 r.

W szczególności sformułowano i częściowo rozwiązano problem numerycznego całkowania równań termosprężystości. Ta ostatnia problematyka, w swoim aspekcie matematycznym, została zakwalifikowana do 5-letniego planu badań naukowych (plan N-T) Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie; stanowi ona przedmiot 1 pracy habilitacyjnej i dwu prac doktorskich.

6. <u>Zespół Geometrii Różniczkowej</u> (opracował W. Morytko)

Opiekunem Zespołu jest Kierownik Katedry prof. Mirosław Mochnacki. Na seminariach w początkowym okresie, uczestnicy referowali teorię krzywych i powierzchni w ujęciu tensorowym, a następnie niektóre publikacje na temat definicji krzywizny przy słabszych założeniach. Ten pierwszy okres traktowany jest jako przygotowanie uczestników do zasadniczej tematyki pracy Zespołu jaką będzie teoria obiektów geometrycznych.

Aktualnie w Zespole są w opracowaniu następujące problemy: badanie czasoprzestrzeni z czasem absolutnym jako temat pracy doktorskiej mgr S. Sedlaka,oraz układy elektromechaniczne jako obiekty geometryczne jako temat pracy doktorskiej mgr G. Suchanka. Mgr G. Suchanek opracował i przygotował do druku prace o krzywiznie i skręceniu w R_3,oraz ich uogólnienia w R_n i w przestrzeniach Riemanna. W dalszej pracy Zespołu należy się spodziewać zakończenia opracowania podjętych problemów oraz podjęcia nowych, głównie z teorii obiektów geometrycznych, jak również z zastosowań geometrii do teorii przekładni zębatych.