ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

CZESŁAW KLUCZNY, ANDRZEJ FLISOWSKI

O ROZWIĄZANIACH OKRESOWYCH RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$

Streszczenie. W pracy niniejszej podane są pewne uogólnienia twierdzeń Lewinsona-Smitha [2] i Dragiliewa [3] dotyczących równań różniczkowych (3) i (7). Dowody zostały przeprowadzone w oparciu o warunek stabilności podany w [1] przez jednego ze współautorów tej noty. Charakter jakościowy tego warunku sprawia, że wyniki przedstawione w pracy są osiągnięte bez potrzeby przeprowadzania większych rachunków, co ją wyraźnie różni od prac cytowanych wyżej. Dodatkową różnicą jest metoda, która jest wspólna w obydwu rozważanych przypadkach i może być z powodzeniem zastosowana do szerszego kręgu podobnych zagadnień.

1. Zajmiemy się najpierw równaniem różniczkowym

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \tag{1}$$

zaczynając od następującej uwagi:

Uwaga 1. W twierdzeniach 1 i 2 z [1] zostały sformułowane warunki stabilności i niestabilności rozwiązania zerowego dla równania (1). Śledząc dowody tych twierdzeń, przekonujemy się z łatwością, że są także prawdziwe w pewnym sensie ogólniejsze twierdzenia, które tym razem wypowiemy odnośnie układu

$$x' = g(x, y) \qquad y' = h(x, y) \tag{2}$$

Wprowadzimy następujące założenia:

HIPOTEZA A

Funkcje $g(x, y)$ i $h(x, y)$ są określone i ciągłe w całej płaszczyźnie, $g(o, o) = h(o, o) = 0$, a rozwiązania układu (2) są jednoznaczne.

Niech łuk s o równaniu $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in J$ jest łukiem trajektorii układu (2), przy czym $y(t) \geqslant 0$ i $x'(t) \geqslant 0$ lub $y(t) \leqslant 0$ i $x'(t) \leqslant 0$ i załóżmy, że łuk s można przedstawić także równaniem $y = \varphi(x)$, $x \in \Delta$.

Połóżmy $H_1(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, -y) + g(x, -y)\, h(x, y)$ i oznaczmy przez $\tilde{s}$ krzywą o równaniu $y = -\varphi(x)$, $x \in \Delta$ a przez S zbiór punktów

$$S = (x, y)\left\{x \in \Delta,\ |y| \leqslant |\varphi(x)|\right\}$$

TWIERDZENIE 1

Jeśli założenia Hipotezy A są spełnione, to przy powyższych oznaczeniach trajektoria $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ układu (2) zaczynająca się przy $t = \bar{t}$ na $\tilde{s}$ jest dla $t > \bar{t}$ i $\bar{x}(t) \in \Delta$ zawarta w $\bar{S}$ lub leży poza S, odpowiednio do tego, czy $H_1(xy) \geqslant 0$ lub $H_1(x, y) \leqslant 0$ na łuku $\tilde{s}$. Jeżeli przy tym nierówności te są spełnione silnie, to trajektoria, o której mowa, jest dla $t > \bar{t}$ zawarta w S lub odpowiednio poza $\tilde{S}$.

Wprowadźmy teraz do sformułowania twierdzenia 1 następujące zmiany: łuk s będący łukiem trajektorii układu (2) spełnia związki

$x(t) \geqslant 0$ i $y'(t) \leqslant 0$ lub $x(t) \leqslant 0$ i $y'(t) \geqslant 0$ oraz daje się przedstawić równaniem $x = \phi(y)$, $y \in \Delta$

$\tilde{s}$: $x = -\phi(y)$, $y \in \Delta$

$S = (xy)\{ y \in \Delta$ i $|x| \leqslant |\phi(y)|\}$

$H_2(x, y) = -g(x, y) \cdot h(-x, y) - g(-x, y) \cdot h(x, y)$

TWIERDZENIE 2

Po wprowadzeniu do sformułowania twierdzenia 1 powyższych zmian i zastąpieniu funkcji $H_1(x, y)$ przez $H_2(x, y)$, oraz $\bar{x}(t) \in \Delta$ przez $\bar{y}(t) \in \Delta$ otrzymujemy twierdzenie prawdziwe.

Uwaga 2. Jeżeli istnieje łuk σ_1 trajektorii układu (2) zaczynający się w punkcie $A_1(o, \eta_1)$, który okrąża raz początek układu O(o, o) i kończący się w punkcie $A_2(o, \eta_2)$ oraz łuk σ_2 zaczynający się w $A_3(o, \eta_3)$ i po jednym okrążeniu kończy się w punkcie $A_4(o, \eta_4)$, przy czym $o < \eta_1 < < \eta_2 < \eta_4 < \eta_3$ to istnieje rozwiązanie okresowe, którego trajektoria przecina oś y w punkcie (o, η) $\eta_2 < \eta < \eta_4$

Słuszność tej uwagi wynika z twierdzenia o punkcie stałym. W zależności od tego, czy trajektoria okrążająca punkt O(o, o) zawiera łuk typu σ_1 czy σ_2 będziemy mówili, że się oddala lub zbliża do początku układu.

2. Zajmiemy się teraz równaniem Liénarda

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{3}$$

Równanie (3) jest równoważne układowi

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -f(x)y - g(x) \tag{4}$$

Oznaczmy przez $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ i $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ oraz wprowadźmy następujące założenia:

HIPOTEZA B

1° funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na osi x,
$f(o) < 0$

2° $x\,g(x) > 0$ dla $x \neq 0$

3° $G(x) \to +\infty$ gdy $x \to \pm\infty$

4° istnieją liczby b_1 i b_2, $b_1 < 0 < b_2$ takie, że $F(b_1) < F(b_2)$,

dla $x \leqslant b_1$ i $x \geqslant b_2$ $f(x) \geqslant 0$

5° rozwiązanie równania (3) są jednoznaczne.

Jeżeli spełnione są założenia Hipotezy B, to mają miejsce następujące fakty:

1) każda trajektoria zaczynająca się przy $t = t_1$ w punkcie P różnym od O(o, o) nawija się dokoła tego punktu

2) jeżeli punkt P jest dostatecznie blisko punktu O(o, o) to wychodząca z niego trajektoria oddala się od początku układu

3) istnieją trajektorie zbliżające się do początku układu.

Stwierdzenie pierwsze zostało wykazane przez różnych autorów choćby przez A.W. Dragiliewa [3] str. 153.

Wystarczają do tego założenia 1°, 2°, 3° i 5° Hipotezy B.

Dla dowodu stwierdzenia drugiego wystarczy poprowadzić dwa łuki trajektorii przechodzące odpowiednio przez punkty $(-\varepsilon, o)$, (ε, o) zawarte w górnej półpłaszczyźnie, przy czym ε tak małe, że $f(x) < 0$ w $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$

Jeden z tych łuków zawiera się w pasie $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Korzystając z twierdzenia 1 zauważmy, że funkcja $H_1(x, y)$ ma postać $H_1(x, y) = 2 f(x)y^2$ i jest ujemna we wspomnianym pasie, a więc istnieje trajektoria oddalająca się od początku układu.
Stwierdzenie trzecie udowodnimy wykazując istnienie łuku trajektorii układu (4) posiadającego własności łuku σ_2 z uwagi 2. Dowód przeprowadzimy znów w oparciu o twierdzenie 1, przy zastosowaniu pewnej transformacji do układu (4). Zauważmy, że bezpośrednio z twierdzenia 1 nie moglibyśmy tego wykazać, ponieważ warunek $H_1(x, y) \geqslant 0$ nie zachodzi w żadnym zbiorze, będącym dopełnieniem dowolnego, ograniczonego otoczenia punktu $O(o, o)$, ponieważ jak już to zaznaczyliśmy wcześniej w pasie S:

$$-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon, \quad y \neq 0$$

jest spełniony warunek przeciwny $H_1(x, y) < 0$.
Oprzemy się na następującej uwadze, którą zresztą można sformułować znacznie ogólniej, co jednak w naszym przypadku nie jest potrzebne.

Uwaga 3. Jeżeli przekształcenie

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \qquad y = \phi(\bar{x}, \bar{y})$$

różnowartościowe i ciągłe przekształca płaszczyznę na siebie, przy czym prawą jej część na siebie, a punkty na osi y pozostawia na miejscu lub podlegają one stałemu przesunięciu: $(o, y) \to (o, y + c)$ c - stałe, to łuk σ_2 opisany w uwadze 2 przechodzi w łuk o tych samych własnościach.

Zastosujmy do układu (4) przekształcenie

$$x = \bar{x} \qquad y = \bar{y} + h(\bar{x}) \tag{5}$$

Funkcję $h(x)$ postaramy się określić tak, by była klasy C^1 i by układ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{y} + h(\bar{x}) \quad \dot{\bar{y}} = -\left[f(\bar{x}) + h'(\bar{x})\right]\left[\bar{y} + h(\bar{x})\right] - g(\bar{x}) \tag{6}$$

spełniał poza pewnym prostokątem warunek $H_1(\bar{x}, \bar{y}) > 0$.
W dalszym ciągu opuszczam znak "–" nad zmiennymi x i y.
Funkcja $H_1(x, y)$ ma teraz postać

$$H_1(x, y) = 2\left[f(x) + h'(x)\right] \cdot \left[y^2 - h^2(x)\right] - 2g(x)h(x)$$

Połóżmy $\varepsilon = \dfrac{F(b_2) - F(b_1)}{b_2 - b_1}$, oczywiste jest, że $\varepsilon > 0$.

Określmy funkcję $h(x)$ w sposób następujący

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant b_1 \text{ lub } x \geqslant b_2 \\ \varepsilon x - F(x) - \dfrac{F(b_2)b_1 - F(b_1)b_2}{b_2 - b_1} & \text{dla } b_1 \leqslant x \leqslant b_2 \end{cases}$$

Funkcja $h(x)$ jest ciągła oraz $f(x) + h'(x) = \varepsilon > 0$
Przy tak określonej funkcji $h(x)$ warunek $H_1(x, y) > 0$ jest spełniony w całej płaszczyźnie poza zbiorem D określonym nierównościami

$$\varepsilon y^2 - hg - \varepsilon h^2 \leqslant 0 \qquad b_1 \leqslant x \leqslant b_2$$

Jest to obszar ograniczony.
Wiemy już, że każda trajektoria układu (4) poza punktem O(o, o) przy t rosnącym nawija się dokoła tego punktu, więc z własności przekształcenia (5) wynika, że to samo dotyczy trajektorii układu (6). Ponieważ każda trajektoria wychodząca z ujemnej części osi x,

dochodzi do dodatniej części osi y, więc możemy określić funkcję $y = k(x)$ przyporządkowującą każdemu punktowi (x, o), gdzie $x < 0$ punkt dodatniej części osi y, w którym trajektoria wychodząca z (x, o) po raz pierwszy przecina oś y. Funkcja ta posiada przy $x \to -\infty$ bądź granicę skończoną K, bądź dąży do nieskończoności. W pierwszym wypadku biorąc trajektorię wychodzącą z (o, K) widzimy, że po jednym okrążeniu przecina ona dodatnią część osi y w punkcie K_1, przy czym $K_1 \leqslant K$, czyli mamy łuk σ_2 z uwagi 2. W drugim wypadku jest widoczne, że istnieje półtrajektoria układu (5), o końcach na osi x cała zawarta poza obszarem D i z twierdzenia 1 wynika, że trajektoria ta zbliża się do początku układu. Odpowiadająca jej trajektoria układu (4) posiada tę samą własność. Wykazaliśmy więc następujące

TWIERDZENIE 3

Jeżeli założenia Hipotezy B są spełnione, to równanie (3) ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

3. Zajmiemy się teraz równaniem

$$\ddot{x} + \bar{f}(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \tag{7}$$

Wprowadzimy następujące założenia.

HIPOTEZA C.

1' funkcja $\bar{f}(x, y)$ jest określona i ciągła w całej płaszczyźnie, $\bar{f}(o, o) < 0$

2' istnieje funkcja $f(x)$ określona na całej osi, taka że $f(x) \leqslant \bar{f}(x, y)$ dla każdego x i y

3' funkcja $g(x)$ i określona w powyższy sposób funkcja $f(x)$ spełniają założenia $1^o - 4^o$ Hipotezy B.

4' rozwiązania równania (7) są jednoznaczne.

Równanie (7) równoważne jest układowi

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -\bar{f}(x, y)y - g(x) \tag{8}$$

W sposób analogiczny, jak w punkcie 2 dowodzimy istnienia trajektorii tego układu o własnościach podanych w uwadze 2.

W naszym przypadku funkcja $H_1(x\ y)$ ma postać

$$H_1(x, y) = y^2\left[\bar{f}(x, y) + \bar{f}(x, -y)\right]$$

i jest ujemna w pewnym otoczeniu $O(o, o)$, a więc jest oczywiste (analogicznie jak w punkcie 2) istnienie w tym obszarze łuku typu σ_1 z uwagi 2. Dla wykazania istnienia łuku trajektorii układu (8) typu σ_2 stosujemy do tego układu przekształcenie (5). Otrzymujemy układ (opuszczam znak - nad zmiennymi x i y).

$$\dot{x} = y + h(x) \quad \dot{y} = -\left[y + h(x)\right]\left\{\bar{f}\left[x, y + h(x)\right] + h'(x)\right\} - g(x) \tag{9}$$

i funkcję

$$H_1(x, y) = (y^2 - h^2)\left[\dot{f}(x, y + h) + \bar{f}(x, -y + h) + 2\,h'\right] - 2\,g\,h$$

Poza ograniczonym obszarem, w którym

$$y^2 \leqslant h^2(x) \qquad b_1 \leqslant x \leqslant b_2$$

jest

$$H_1(x,y) \geqslant 2\left[f(x) + h'(x)\right]\cdot\left[y^2 - h^2(x)\right] - 2g(x)\, h(x)$$

Postępując analogicznie, jak w punkcie 2, w szczególności określając ε i $h(x)$ w ten sam sposób, dochodzimy do wniosku, że istnieją trajektorie zbliżające się do początku układu.
Otrzymujemy w ten sposób następujące

TWIERDZENIE 4

Jeżeli są spełnione założenia Hipotezy C, to równanie (7) posiada co najmniej jedną trajektorię okresową.

Uwaga 4. Na to, by trajektorie się nawijały, wystarczy następujący warunek:

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = +\infty \quad \text{lub} \quad \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty \qquad (\alpha)$$

i

$$\int_0^{-\infty} g(t)\, dt = +\infty \quad \text{lub} \quad \int_0^{-\infty} f(t)\, dt = -\infty \qquad (\beta)$$

a więc na to, by $\lim\limits_{x \to -\infty} K(x) < +\infty$

wystarczy warunek (α) oraz warunki

$$\int_0^{-\infty} g(t)\, dt = +\infty \quad \text{i} \quad \int_0^{-\infty} f(t)\, dt = -\infty$$

Uwaga ta uogólnia twierdzenie 3 i 4.

4. Uwagi końcowe

Rozważania w pracy niniejszej opierają się, jak to już wspomnieliśmy, na warunku stabilności o charakterze jakościowym i w konsekwencji mają podobny charakter. W porównaniu z pracami [2] [3] zawierają niewiele rachunków. W zastosowaniu do twierdzenia Dragiliewa uzyskaliśmy już pewne uogólnienia. Chodziło nam jednak raczej o zaprezentowanie nowej metody sprawniejszej i prostszej. Jej zalety okazały się wyraźne przy przejściu do przypadku ogólniejszego - równania (7), którego otrzymanie było już prawie natychmiastowe.

W porównaniu z pracą [2] jest to już ogromna różnica. W pracy tej występują bowiem takie założenia, jak np. że istnieje punkt $b_3 > b_2$ taki, że

$$\int_{b_2}^{b_3} \bar{f}(x, y)\, dx > 10\, M\, b_2 \quad (\text{gdzie } M \text{ taka, że } \bar{f}(x, y) \geqslant -M)$$

Jak wspominają autorzy [3] H.B. Adamowi udało się zmniejszyć występującą w tym warunku stałą 10 do 4. Warunek ten u nas jednak wcale nie figuruje, a pozostałe są mniej krępujące. Wydaje się, że metoda ta z równym powodzeniem może być zastosowana i w innych przypadkach.

LITERATURA

[1] Kluczny Cz.: O pewnych warunkach stabilności dla równania różniczkowego $x'' + f(x, x') = 0$. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka,Fizyka, 11, 1966.

[2] Levinson N., Smith O.K.: A general equation of relaxation oscillations Duke mathem. J. 9 1942.

[3] Niemyckij W.W., Stiepanow W.W.: Качественная теория дифференциальных уравнений Wydanie II, Moskwa Leningrad s. 152-164.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$

Р е з ю м е

В этой работе даны некоторые обобщения теорем касающихся существования периодических решений уравнения (7). Мы пользовались методом основанным на условиях стабильности принадлежащих одному из авторов этой заметки. Характер этих условий равно как и заметки качественный.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF THE EQUATION $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$

S u m m a r y

In this note we present, some generalisations of some theorems concerning the existence of periodic solution of equation (7). The applied method is based an stability conditions given earlier by one of the authors of this note [1]. Similarly as these conditions, has the note qualitative character.