ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

ALBIN MASZTALERZ
Katedra Matematyki
Wydział Mat.-Fiz. P.Śl.

O RÓWNANIU TYPU VAN DER POLA Z WYMUSZENIEM STOCHASTYCZNYM

Streszczenie: W artykule podano pewien sposób wyznaczania przybliżonej wartości wariancji odchyleń losowych (wywołanych wymuszeniem stochastycznym) od stabilnego rozwiązania okresowego opisanego przez równania (1), przy $\nu = 0$.

I. Wstęp

Weźmy pod uwagę równanie typu van der Pola

$$\ddot{u}(t) + \omega_o^2 u(t) = \mu f[u(t), \dot{u}(t)] + \mu\nu \cdot \zeta(t) \tag{1}$$

gdzie $f(u, v)$ jest wielomianem stopnia > 2 zmiennych u i v, μ i ν są stałe, μ jest tzw. małym parametrem $0 \leqslant \mu < 1$, a $\nu \geqslant 0$. $\zeta(t)$ dany proces stochastyczny, stacjonarny.

Załóżmy, że przy $\nu = 0$, równanie (1) posiada stabilne okresowe rozwiązanie $x(t)$, dla $t \geqslant 0$, wówczas

$$\ddot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = \mu f[x(t), \dot{x}(t)] \tag{2}$$

i $x(t)$ jest funkcją nielosową.

Jeżeli $\nu \neq 0$, to równanie (1) opisuje pewien proces stochastyczny.

Załóżmy, że $\eta(t)$ jest rozwiązaniem (1), wtedy

$$\ddot{\eta}(t) + \omega_o^2 \eta(t) = \mu f[\eta(t), \dot{\eta}(t)] + \mu\nu \cdot \zeta(t) \tag{3}$$

Niech

$$\eta_o(t) = \eta(t) - x(t), \ \ddot{\eta}_o(t) = \ddot{\eta}(t) - \ddot{x}(t) \tag{4}$$

Po odjęciu stronami od (3) równania (2), otrzymamy

$$\ddot{\eta}(t) - \ddot{x}(t) + \omega_o^2[\eta(t) - x(t)] = \mu[f(\eta, \dot{\eta}) - f(x, \dot{x})] + \mu\nu.\zeta(t) \tag{5}$$

Załóżmy, że $\eta_o(t)$ i $\ddot{\eta}_o(t)$ są małe w tym sensie, że ich wariancje są małe, np. rzędu $O(\mu^2)$. Wobec takiego założenia, można różnicę $f(\eta, \dot{\eta}) - f(x, \dot{x})$ zlinearyzować w otoczeniu punktu $(x, \dot{x})$

$$f(\eta, \dot{\eta}) - f(x, \dot{x}) = \mu\left[\frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial u}(\eta - x) + \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial v}(\dot{\eta} - \dot{x})\right] \tag{6}$$

Wstawiając (4) do (6) i (5) otrzymamy

$$\ddot{\eta}_o(t) + \omega_o^2 \eta_o(t) = \mu\left[\frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial u} \cdot \eta_o(t) + \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial v} \cdot \dot{\eta}_o(t)\right] + \mu.\nu.\zeta(t) \tag{7}$$

Rozwiązanie równania (1) sprowadza się zatem do rozwiązania dwóch równań:

1) równania (2) z którego wyznaczamy rozwiązanie okresowe przy braku wymuszenia losowego, i
2) równania przybliżonego (7) dla odchyleń losowych.

II. Rozwiązanie równań (2) i (7)

Załóżmy, że warunki początkowe dla (1) są nielosowe, oznacza to, że należy je dołączyć do równania (2).
Przypuśćmy, że $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $x_0, \dot{x}_0$ - const., to dla (7) przyjmujemy

$$\eta_0(0) = \dot{\eta}_0(0) = 0 \tag{8}$$

z prawdopodobieństwem 1.

Wiadomo, że (p. np. [1], str. 43), że rozwiązanie stabilne równania (2) z dokładnością do rzędu $O(\mu)$ ma postać

$$x = a \cos \Psi, \ \dot{x} = -\omega_0 a \sin \Psi \tag{9}$$

gdzie $a = a(t)$, $\Psi = \omega_0 t + \varphi(t)$, a i φ jest wolnozmienną funkcją czasu.

Niech

$$g_0(x,\dot{x}) = \frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial u}, \quad g_1(x,\dot{x}) = \frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial v} \tag{10}$$

wtedy z (9) i (10), (7) przyjmie postać:

$$\ddot{\eta}_0(t) + \omega_0^2 \eta_0(t) = \mu[g_0(a \cos\Psi, - \omega_0 a \sin\Psi) \cdot \eta_0(t) +$$

$$+ g_1(a \cos\Psi, - \omega_0 a \sin\Psi) \cdot \dot{\eta}_0(t)] + \mu \nu \cdot \zeta(t) \tag{11}$$

Odnośnie równania (11) załóżmy, że:
i) równania (2) i (11) posiada rozwiązania klasy C^3 dla $t \geq 0$,
ii) proces $\zeta(t)$ jest różniczkowalny dla $t \geq 0$,
iii) równanie (2) opisuje stan ustalony, tzn. a = const.
iv) $P\{\ddot{\eta}_0(o) = \zeta(o) = o\} = 1$.

Na podstawie założeń i - iv, różniczkuję obie strony równania (11)

$$\frac{d}{dt}[\ddot{\eta}_o + \omega_o^2 \eta_o] = \mu\frac{d}{dt}[g_o(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)\eta_o +$$

$$+\mu\frac{d}{dt}[g_1(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\ )\dot{\eta}_o + \mu\nu\cdot\frac{d\zeta}{dt} \qquad (12)$$

jest widoczne, że pochodna $\frac{d}{dt}[\ddot{\eta}_o + \omega_o^2\eta_o]$ jest proporcjonalna do μ, więc $\ddot{\eta}_o + \omega_o^2\eta_o$ jest wolnozmienną funkcją czasu, a ponieważ współczynniki g_o i g_1 są okresowe o okresie 2π, więc można prawą stronę uśrednić względem ψ, (p. [17], wówczas zamiast (12) otrzymamy równanie uśrednione

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\eta}_o + \omega_o^2\eta_o) = \frac{\mu}{2\pi}\int_0^2 \frac{d}{dt}[g_o(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)\eta_o]d\psi +$$

$$+\frac{\mu}{2\pi}\int_0^2 \frac{d}{dt}[g_1(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)\dot{\eta}_o]d\psi + \mu\nu\frac{d\zeta}{dt} \qquad (13)$$

Przekształcamy prawą stronę (13)

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\eta}_o + \omega_o^2\eta_o) = \frac{\mu}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} g_o(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)\eta_o\, d\psi +$$

$$+\frac{\mu}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} g_1(a\cos\psi_1 - \omega_o a\sin\psi)\dot{\eta}_o\, d\psi + \mu\nu\frac{d\zeta}{dt} =$$

$$=\mu\frac{d\eta_o}{dt}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2} g_o(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)d_o\psi +$$

$$+\mu\frac{d\dot{\eta}_o}{dt}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2} g_1(a\cos\psi_1 - \omega_o\, a\sin\psi)d\psi + \mu\nu\frac{d\zeta}{dt} \tag{14}$$

Niech

$$\bar{g}_o(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} g_o(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)d\psi,$$

$$\bar{g}_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} g_1(a\cos\psi, -\omega_o a\sin\psi)d\psi \tag{15}$$

z (14) i (15)

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\eta}_o + \omega_o^2\eta_o) = \mu\bar{g}_o(a)\frac{d\eta_o}{dt} + \mu\bar{g}_1(a)\frac{d\dot{\eta}_o}{dt} + \mu\nu\frac{d\zeta}{dt} \tag{16}$$

Całkując obie strony (16) w przedziale od 0 do t, otrzymamy

$$\ddot{\eta}_o(t) + \omega_o^2\eta_o(t) - [\ddot{\eta}_o(o) + \omega_o^2\eta_o(o)] = \mu\bar{g}_o(a)\eta_o(t) +$$

$$+\mu\bar{g}_1(a)\dot{\eta}_o(t) + \mu\nu\zeta(t) - [\mu g_o(a)\eta_o(o) + \mu\bar{g}_1(a)\dot{\eta}_o(o) + \mu\nu\zeta(o)]$$

Uwzględniając (8) i zał. iv mamy z prawdopodobieństwem 1:

$$\ddot{\eta}_o(t) - \mu\bar{g}_1(a)\dot{\eta}_o(t) + [\omega_o^2 - \mu\bar{g}_o(a)]\eta_o(t) = \mu\nu\xi(t) \tag{17}$$

Załóżmy, że f(u,v) jest taka, że

$$\bar{g}_1(a) < 0,\ \omega_o^2 \geqslant \mu\bar{g}_o(a) \tag{18}$$

ten warunek dla równania np. van der Pola jest spełniony.

Załóżmy, że $E(\zeta) = 0$, a funkcja korelacyjna jest $K_\zeta(\tau)$. Wyznaczamy gęstość spektralną

$$S_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K_\zeta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

Kwadrat modułu charakterystyki częstotliwościowej dla (17) jest

$$|\phi(i\omega)|^2 = \frac{1}{[\omega^2 - \omega_o^2 + \mu\bar{g}_o(a)]^2 + [\mu\bar{g}_1(a)\omega]^2}$$

Jeżeli $S\eta_o(\omega)$ oznacza gęstość spektralną procesu $\eta_o(t)$ a $K_{\eta_o}(\tau)$ jego funkcję korelacyjną, to jak wiadomo [2]

$$S_{\eta_o}(\omega) = \frac{S_\zeta(\omega)}{[\omega^2 - \omega_o^2 + \mu\bar{g}_o(a)]^2 + [\mu\bar{g}_1(a)\omega]^2}$$

i
$$K_{\eta_o}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta_o}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\zeta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{[\omega^2 - \omega_o^2 + \mu\bar{g}_o(a)]^2 + [\mu\bar{g}_1(a)\omega]^2} \qquad (19)$$

przy $\tau = 0$, otrzymujemy wariancję procesu $\eta_o(t)$

$$\sigma^2_{\eta_o} = K_{\eta_o}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\zeta(\omega) d\omega}{[\omega^2 - \omega_o^2 + \mu\bar{g}_o(a)]^2 + [\mu\bar{g}_o(a)\,\omega]^2} \qquad (20)$$

Wartość przeciętna procesu $E[\eta_o(t)]$ wynosi 0.

III. Przykład

Weźmy równanie van der Pola

$$\ddot{u} - \mu(1 - u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = \mu\nu(\xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t) \qquad (21)$$

Załóżmy, że $0 \leqslant \mu < 1$, $\nu > 0$, $\lambda > \omega_0$

ξ_1 i ξ_2 są zmiennymi losowymi takimi, że

$E(\xi_1) = E(\xi_2) = 0$, $E(\xi_1 \xi_2) = 0$, $E(\xi_1^2) = E(\xi_2^2) = D_0 \mu^2 \nu^2$, $D_0 > 0$

Równanie (21) ma stabilne rozwiązanie

$x = 2 \cdot \cos\psi$, $\dot{x} = -2\,\omega_0 \sin\psi$, $\psi = \omega_0 t + \psi_0$, $\psi_0 = \text{const.}$

Współczynniki:

$g_0(2\cos\psi, -2\omega_0 \sin\psi) = -4\omega_0 \sin 2\psi$, $g_1(2\cos\psi, -2\omega_0 \sin\psi) = 1 - 4\cos^2$

stąd

$$\bar{g}_0(a) = 0, \ \bar{g}_1(a) = -1, \ a = 2.$$

i równanie dla odchyleń losowych $\eta_0(t)$ będzie

$$\ddot{\eta}_0 + \mu\dot{\eta}_0 + \omega_0^2 \eta_0 = \mu\nu(\xi_1 \cos\lambda t + \xi_2 \sin\lambda t)$$

Wartość przeciętna

$$E(\zeta) = 0,$$

Funkcja korelacyjna

$$K_\zeta(\tau) = D_o \mu^2 v^2 \cos\lambda t$$

gęstość spektralna

$$S_\zeta(\omega) = D_o \mu^2 v^2 [\delta(\omega+\lambda) + \delta(\omega-\lambda)], \quad (\delta \text{ delta}), \quad (\text{p. } [2])$$

więc z (19)

$$K_{\eta_o}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D_o \mu^2 v^2 [\delta(\omega+\lambda)+\delta(\omega-\lambda)] e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega^2-\omega_o^2)^2 + \mu^2\omega^2}$$

stąd wariancja procesu $\eta_o(t)$

$$\sigma^2_{\eta_o} = K_{\eta_o}(0) = \frac{2 D_o \mu^2 v^2}{(\lambda^2-\omega_o^2)^2 + \mu^2 v^2}$$

LITERATURA

[1] Bogolubow N.N., Mitropolski J.A. - Asymptoticzeskije metody w teorii nieliniejnych kolebanij, Moskwa 1963.

[2] Lewin B.R. - Teoreticzeskije osnowy staticzeskoj radiotechniki Moskwa, 1969.

Р е з ю м е

В заметке получено приблеженную дисперсию случайных флуктуаций от стабильного периодического решения уравнения (1), когда $\nu = 0$.

S u m m a r y

The article discusses a way of determining the approximate value of mean square of random fluctuations, from the stabile periodic solution expressed by means of eq. (1), by $\nu = 0$