ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

BRONISŁAW SZLĘK

O PEWNYM UKŁADZIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWYCH

I. Wstęp

Rozważany niżej problem wyniknął w toku prac prowadzonych w Zakładzie Mechaniki Górotworu PAN w Krakowie.

Badania procesu przesiewania materiałów sypkich przez n sit [1] sprowadziły problem fizyczny do następującego problemu matematycznego:

czy układ równań

$$(1.1)\qquad \frac{\partial D_i(x,t)}{\partial t}\int_a^b \left[D_{i-1}(y,t) - D_i(y,t)\right] dy =$$

$$= \lambda_{i-1}(x,t)\left[D_{i-1}(x,t) - D_i(x,t)\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

z warunkami początkowymi

$$(1.2)\qquad D_i(x,0) = f_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(1.3)\qquad \int_a^b \left[D_{i-1}(y,t) - D_i(y,t)\right] dy = K_i > 0 \quad \text{dla } t = 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

jest rozwiązalny, czy zachodzi jednoznaczność, jeśli istnieje rozwiązanie to zbadać jego własności itp.

Warunek (1.3) może wydawać się dziwny; ma on jednak sens fizykalny i wyniknął z rozważań wspomnianego problemu technicznego.

Na dane funkcje λ_i, D_o, f_i nakładamy następujące założenia:

(1.4) $\lambda_i(x,t)$ są określone, nieujemne, mierzalne, wspólnie ograniczone, całkowalne w sensie Lebesgue'a jako funkcje dwóch zmiennych w każdym skończonym prostokącie $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant t'$

(1.5) $D_o(x,t)$ jest określona, nieujemna, ograniczona, mierzalna dla $x \in \langle a, b \rangle$, $t \geqslant 0$

(1.6) $\left| \int_a^b D_o(x,t)\, dx \right|$ jest ograniczona z góry i z dołu przez liczby dodatnie dla $t \geqslant 0$.

(1.7) $f_i(x)$ są określone, nieujemne, ograniczone, mierzalne w $\langle a, b \rangle$ oraz

(1.8) $0 \leqslant f_{i+1}(x) \leqslant f_i(x)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$

(1.9) $\int_a^b f_{i+1}(x)dx < \int_a^b f_i(x)dx$ jeśli $f_{i+1}(x) \not\equiv f_i(x)$ i jeśli $f_i(x) > 0$ w zbiorze miary dodatniej zawartym w $\langle a, b \rangle$.

(1.10) $\int_a^b D_i(x,t)dx > \int_a^b f_{i+1}(x)dx$ dla każdego $t \geqslant 0$.

We wszystkich dalszych rozważaniach użyjemy skróconego znakowania: zamiast pisać $D_i(x,t)$, $\lambda_i(x,t)$, $f_i(x)$ będziemy krótko notować D_i, λ_i, f_i.

Definicja.

Rozwiązaniem układu (1.1) z warunkami (1.2), (1.3) w prostokącie $\langle a, b\rangle \times \langle 0, t_o\rangle$ nazywamy ciąg funkcji $D_1, D_2, \ldots, D_n$, które:

(1.11) wraz z daną funkcją D_o spełniają prawie wszędzie w prostokącie $\langle a, b\rangle \times \langle 0, t_o\rangle$ układ (1.1) i warunki (1.2), (1.3)

(1.12) są określone, mierzalne, ograniczone i całkowalne w sensie Lebesgue'a względem obu zmiennych w prostokącie $\langle a, b\rangle \times \langle 0, t_o\rangle$

(1.13) są absolutnie ciągłe względem t dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b\rangle$

(1.14) $D_i \neq D_{i+1}$ na podzbiorze miary dodatniej prostokąta $\langle a, b\rangle \times \langle 0, t_o\rangle$

(1.15) $\dfrac{1}{\int_a^b [D_{i-1} - D_i]\,dx}$ są całkowalne według Lebesgue'a w przedziale $\langle 0, t_o\rangle$

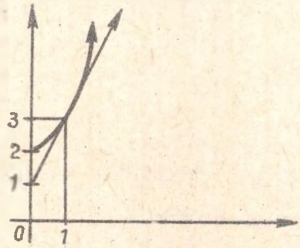
Jeżeli nie zachodzi warunek (1.15), to rozwiązanie może nie być jednoznacznie określone. Ilustruje to następujący przykład:

Niech $a = 0$, $b = 1$, $D_o = 2 + t^2$, $\lambda_o = 2$, $f_1 = 1$.

Wówczas funkcje:

$$D_1 = 1 + 2t, \quad D_1^* = \begin{cases} 1 + 2t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 + t^2 & \text{dla} \quad t > 1 \end{cases}$$

spełniają pierwsze równanie układu (1.1) i przyjęte warunki początkowe chociaż są funkcjami różnymi na zbiorze miary różnej od zera. Funkcje D_o, D_1^* nie spełniają warunku (1.15) w zbiorze obszerniejszym niż $\langle 0, 1 \rangle$. Natomiast funkcje D_1, D_1^* są rozwiązaniem pierwszego równania dla $t < 1$. Wówczas warunek (1.15) jest spełniony.



II. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

Jest widoczne, że przy założeniu (1.15) układ (1.1) jest równoważny następującemu układowi równań całkowych:

$$(2.1) \qquad D_i = f_i + \int_0^t \frac{\lambda_{i-1}(x,s)\left[D_{i-1}(x,s) - D_i(x,s)\right]}{\int_a^b \left[D_{i-1}(y,s) - D_i(y,s)\right] dy} \, ds$$

Rozwiązaniem układu (2.1) z warunkiem (13) w prostokącie $\langle a, b \rangle \times \langle 0, t_o \rangle$ jest ciąg funkcji $D_1, D_2, \ldots, D_n$ spełniających warunki (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) i (1.15).

Układy (1.1) i (2.1) mają taką budowę, że można z nich kolejno wyznaczać funkcje $D_1, \ldots, D_n$. Wykażemy, że przy przyjętych założeniach o funkcjach D_o, λ_i, f_i układ (2.1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie. W tym celu będziemy stosować metodę kolejnych przybliżeń. Wpierw jednak przyjmiemy pewne oznaczenia i udowodnimy oszacowania niezbędne w dalszych rozważaniach. Oznaczmy

(2.2) $P_j = \langle a, b\rangle \times \langle 0, t_j\rangle$, gdzie $t_j > 0$

(2.3) $R_{kj} = \langle a, b\rangle \times \langle t_k, t_j\rangle$ gdzie $t_j > t_k > 0$

Z założeń (1.5) i (1.7) wynika, że istnieją takie stałe C_o, F_1, że

(2.4) $0 \leqslant D_o \leqslant C_o$ w pewnym P_1

(2.5) $0 \leqslant f_1 \leqslant \frac{F_1}{2}$

Niech $\frac{F_1}{2}$ będzie kresem dolnym wszystkich liczb ograniczających f_1 z góry. Z (1.6) wynika, że $\int_a^b D_o dx \geqslant F_1(b-a) + E_1$ gdzie $E_1 > 0$

Oznaczając $b - a = h$ mamy stąd i z (2.4)

(2.6) $0 < E_1 + F_1 h \leqslant \int_a^b D_o dx \leqslant C_o h$

Z założenia (1.4) wynika, że istnieje taka stała $M_o > 0$, że

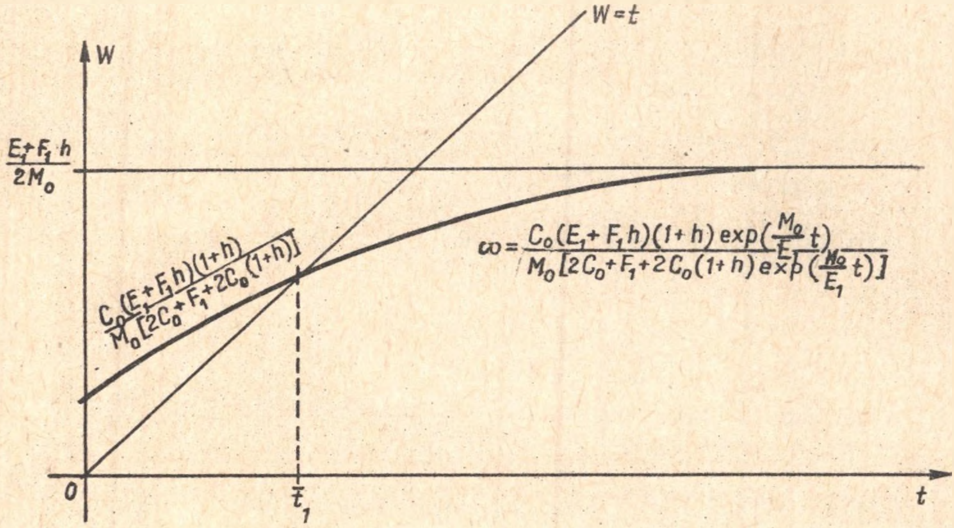
(2.7) $0 \leqslant \lambda_o(x,t) \leqslant M_o$

Wprowadzimy teraz pewien prostokąt P_1 określony równością (2.2) definiując t_1 w następujący sposób:

Dla danych liczb C_o, F_1, E_1, M_o występujących w nierównościach (2.4), (2.5), (2.6) i (2.7) tworzymy równanie

$$(2.8)\qquad t = \frac{C_o(E_1 + F_1h)(1 + h)\exp\left(\frac{M_o}{E_1}t\right)}{M_o\left[2C_o + F_1 + 2C_o(1 + h)\exp\left(\frac{M_o}{E_1}t\right)\right]}$$

Równanie (2.8) posiada dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie $\bar{t}_1 > 0$ (rys.)



Oznaczmy

$$(2.9)\qquad A_o = (1 + h)C_o \exp\left(\frac{M_o}{E_1}\bar{t}_1\right)$$

$$(2.10)\qquad \bar{\bar{t}}_1 = \frac{E_1(E_1 + F_1h)}{2M_oh(2A_o + 2C_o + F_1)}$$

Zauważmy, że przy oznaczeniach (2.9) i (2.10) mamy dla rozwiązania $\bar{t}_1$ równania (2.8) następującą równość

$$\bar{t}_1 = \frac{A_o(E_1 + F_1 h)}{M_o(2C_o + 2A_o + F_1)} = \frac{2A_o h}{E_1}\bar{\bar{t}}_1 \tag{2.11}$$

Oznaczmy

$$t_1 = \min(\bar{t}_1, \bar{\bar{t}}_1) = \bar{\bar{t}}_1 \min\left(1, \frac{2A_o h}{E_1}\right) \tag{2.12}$$

W dalszych rozważaniach przez P_1 rozumieć będziemy prostokąt określony związkami (2.2) i (2.12).

Utwórzmy teraz następujący ciąg funkcji

$$D_1^{(k+1)} = f_1 + \int_0^t \frac{\lambda_o(x,s)[D_o(x,s) - D_1^{(k)}(x,s)]}{\int_a^b [D_o(y,s) - D_1^{(k)}(y,s)]\,dy} \tag{2.13}$$

gdzie $D_1^{(o)} = f_1$

Zauważmy, że dla każdego k

$$D_1^{(k)}(x,0) = f_1(x) \quad \text{dla } x \in \langle a, b\rangle . \tag{2.14}$$

Wykażemy indukcyjnie, że tak zdefiniowany ciąg funkcji $\{D_1^{(k)}\}$ posiada następujące własności:

(2.15) $D_1^{(k)}$ są mierzalne i całkowalne według Lebesgue'a względem zespołu zmiennych (x,t) w P_1

(2.16) $|D_1^{(k)}| < A_o + \frac{F_1}{2}$ w P_1 i dla dowolnego k

$$(2.17)\qquad \left|\int_a^b (D_o - D_1^{(k)})dx\right| < (A_o + C_o + \frac{F_1}{2})h \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$(2.18)\qquad \left|\int_a^b (D_o - D_1^{(k)})dx\right| > \frac{E_1 + F_1h}{2} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

Własności (2.15) - (2.18) zachodzą dla $k = 0$.
Prawdziwość (2.15) dla $k = 0$ wynika z (2.13) i (1.7), (2.16) dla $k = 0$ wynika z (2.13) i (2.5) a prawdziwość (2.17) dla $k=0$ wynika z (2.16) i (2.4). Dla wykazania, że (2.18) zachodzi dla $k=0$ zauważamy, że

$$\left|\int_a^b (D_o - D_1^{(o)})dx\right| \geqslant \left|\int_a^b D_o dx\right| - \left|\int_a^b f_1 dx\right| = \int_a^b D_o dx - \int_a^b f_1 dx$$

Stąd oraz z (2.5) i (2.6) mamy

$$\left|\int_a^b (D_o - D_1^{(o)})dx\right| \geqslant E_1 + F_1h - \frac{F_1h}{2} = E_1 + \frac{F_1h}{2} > \frac{E_1 + F_1h}{2}$$

Załóżmy teraz, że (2.15) - (2.18) zachodzą dla $k > 0$ w P_1.
Z (2.13) i na podstawie (2.4), (2.5), (2.7), (2.6), (2.16) i (2.18) mamy dla $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$|D_1^{(k+1)}| \leqslant |f_1| + \int_o^t \frac{|\lambda_o(x,s)| \cdot |D_o(x,s) - D_1^{(k)}(x,s)|}{\left|\int_a^b [D_o(x,s) - D_1^{(k)}(x,s)]dx\right|} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{F_1}{2} + \frac{2M_o(A_o + C_o + \frac{F_1}{2})}{E_1 + F_1h} t \leqslant \frac{F_1}{2} + \frac{M_o(2A_o + 2C_o + F_1)}{E_1 + F_1h}\bar{t}_1 = A_o + \frac{F_1}{2}$$

a to znaczy, że (2.16) zachodzi też dla k+1. Stąd i z (2.4) wynika prawdziwość (2.17) dla k+1.

Mierzalność $D_1^{(k+1)}$ wynika bezpośrednio z mierzalności i ograniczoności funkcji λ_0, D_0, $D_1^{(k)}$, f_1, $\int_a^b [D_0(y,s) - D_1^{(k)}(y,s)]\,ds$.

$D_1^{(k+1)}$ jest ponadto ograniczona a więc całkowalna.

Podobnie jak poprzednio z (2.17), (2.18), (2.13), (2.5) mamy dla $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\left|\int_a^b (D_0 - D_1^{(k+1)})\,dx\right| \geqslant \left|\int_a^b D_0 dx\right| - \left|\int_a^b D_1^{(k+1)}\,dx\right|$$

A ponieważ

$$\left|\int_a^b D_1^{(k+1)}dx\right| = \left|\int_a^b f_1 dx + \int_0^t \frac{\int_a^b \lambda_0(x,s)[D_0(x,s) - D_1^{(k)}(x,s)]\,dx}{\int_a^b [D_0(x,s) - D_1^{(k)}(x,s)]\,dx}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{F_1 h}{2} + \frac{M_0(2A_0 + 2C_0 + F_1)h}{E_1 + F_1 h}\, t \leqslant \frac{F_1 h}{2} + \frac{M_0(2A_0 + 2C_0 + F_1)h}{E_1 + F_1 h}\, t_1 =$$

$$= \frac{E_1 + F_1 h}{2} \quad \text{więc}$$

$$\left|\int_a^b (D_0 - D_1^{(k+1)})\,dx\right| \geqslant E_1 + F_1 h - \frac{E_1 + F_1 h}{2} = \frac{E_1 + F_1 h}{2}$$

co kończy dowód własności (2.14) - (2.18) ciągu (2.13).

<u>Twierdzenie 2.1</u>

Jeżeli dana funkcja D_0 spełnia założenia (2.4), (2.6) w P_1 to pierwsze równanie układu (2.1) posiada rozwiązanie w P_1.

Rozwiązaniem tym jest granica ciągu funkcji określonych wzorami (2.13).

Dowód.

Oznaczmy dla krótkości $A_o + \frac{F_1}{2} = B_o$, $A_o + C_o + \frac{F_1}{2} = G_o$, $\frac{E_1 + F_1 h}{2} = H_o$.

Rozważamy różnicę dwóch kolejnych wyrazów ciągu (2.13)

$$|D_1^{(k+1)} - D_1^{(k)}| =$$

$$= \left| \int_o^t \frac{\lambda_o\left[(D_o - D_1^{(k)}) \int_a^b (D_o - D_1^{(k-1)})dx - (D_o - D_1^{(k-1)}) \int_a^b (D_o - D_1^{(k)})dx\right]}{\int_a^b (D_o - D_1^{(k-1)})dx \int_a^b (D_o - D_1^{(k)})\, dx} dx \right|$$

Z uwagi na nierówności (2.7) i (2.18) po odpowiednim zgrupowaniu wyrazów pod całką mamy

$$|D_1^{(k+1)} - D_1^{(k)}| \leq \frac{M_o}{H_o^2} \int_o^t (D_1^{(k)} - D_1^{(k-1)}) \int_a^b (D_1^{(k)} - D_o)dx +$$

$$+ (D_o - D_1^{(k)}) \int_a^b (D_1^{(k)} - D_1^{(k-1)})dx|ds$$

Stąd na podstawie (2.4), (2.16) i (2.17) otrzymujemy

$$(2.19) \qquad |D_1^{(k+1)} - D_1^{(k)}| \leq \frac{M_o G_o}{H_o^2} \int_o^t \Big[|D_1^{(k)} - D_1^{(k-1)}|\, h +$$

$$+ \int_a^b |D_1^{(k)} - D_1^{(k-1)}|\, dx\Big]\, ds$$

Nierówności te zachodzą w P_1. W szczególności, dla $k = 0$ mamy z (2.13) i na podstawie (2.7), (2.17) i (2.18)

$$|D_1^{(1)} - D_1^{(o)}| = \left|\int_o^t \frac{\lambda_o(D_o - D_1^{(o)})}{\int_a^b (D_o - D_1^{(o)})dx} ds\right| \leqslant \frac{M_oG_o}{H_o} t$$

Stąd i z (2.19) otrzymujemy

$$|D_1^{(2)} - D_1^{(1)}| \leqslant \frac{M_oG_o}{H_o^2} \int_o^t \left[|D_1^{(1)} - D_1^{(o)}|h + \int_a^b |D_1^{(1)} - D_1^{(o)}|dx\right]ds \leqslant$$

$$\frac{2(M_oG_o)^2}{H_o^3} h \frac{t^2}{2}$$

Ogólnie na zasadzie indukcji otrzymujemy

$$(2.20)\qquad |D_1^{(k+1)} - D_1^{(k)}| \leqslant \frac{(2\, M_oG_o)^{k+1}}{2H_o^{2k-1}} h \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{w } P_1$$

Stąd wynika, że ciąg $\{D_1^{(k)}\}$ jest zbieżny w P_1. Oznaczmy

$$(2.21)\qquad D_1 = \lim_{k\to\infty} D_1^{(k)}$$

Tak określona funkcja D_1 spełnia wraz z daną funkcją D_o pierwsze równanie układu (2.1). Istotnie, wszystkie $D_1^{(k)}$ są mierzalne i wspólnie ograniczone w P_1. Wobec założeń (1.4), (1.5), (2.18) funkcje $\dfrac{\lambda_o(D_o - D_1^{(k)})}{\int_a^b (D_o - D_1^{(k)})dx}$ są również mierzalne i wspólnie ograniczone w P_1 a więc według twierdzenia Lebesgue'a

$$D_1 = \lim_{k\to\infty} D_1^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \left[f_1 + \int_0^t \frac{\lambda_0(D_0 - D_1^{(k)})}{\int_a^b (D_0 - D_1^{(k)})dx} ds\right] =$$

$$= f_1 + \int_0^t \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_0(D_0-D_1^{(k)})}{\int_a^b (D_0-D_1^{(k)})dx} ds = f_1 + \int_0^t \frac{\lambda_0(D_0-D_1)}{\int_a^b (D_0-D_1)dx} ds$$

a to znaczy, że funkcja D_1 spełnia pierwsze równanie układu (2.1). Spełnia ona także warunek początkowy (1.2).

Dla wykazania, że ta funkcja jest rozwiązaniem pierwszego równania trzeba jeszcze udowodnić, że zachodzą dla niej związki (1.3 (1.12), (1.13), (1.14), (1.15).

Z nierówności (2.18) przez przejście do granicy mamy

$$(2.22) \qquad \left|\int_a^b (D_0 - D_1)dx\right| \geqslant H_0 > 0 \quad \text{w} \quad P_1$$

a więc (1.3) zachodzi.

D_1 jest funkcją mierzalną jako granica ciągu funkcji mierzalnych $\{D_1^{(k)}\}$, z (2.16) i (2.21) wynika ograniczoność D_1 w P_1 a więc D_1 jest całkowalna według Lebesgue'a w P_1.

Również (1.13) jest prawdziwe dla D_1. Wynika to z całkowalności funkcji $\lambda_0(D_0 - D_1)$: $\int_a^b (D_0 - D_1)dx$ i z odpowiedniego założenia o funkcji f_1.

Z (2.22) wynika, że (1.14) jest spełnione. Wynika też stąd, że $[\int_a^b (D_0 - D_1)dx]^{-1}$ jest ograniczona z góry a ponieważ jest ona również mierzalna więc jest także całkowalna.

Określona powyżej funkcja D_1 posiada analogiczne własności do własności funkcji D_o. Ponadto funkcja $D_1(x,t)$ ma jeszcze dodatkowe własności a wśród nich następującą:

$\int_a^b D_1(x,t)dx$ jest niemalejąca, czyli

$$(2.23) \quad \int_a^b D_1(x,t)dx \geqslant \int_a^b D_1(x,0)dx = \int_a^b f_1(x)dx$$

Załóżmy dalej, że funkcja f_2 nie jest identycznie równa zeru, spełnia założenia (1.7), (1.8), (1.9) i jest tego rodzaju, że jeśli

$$(2.24) \quad 0 \leqslant f_2 \leqslant \frac{F_2}{2} \quad \text{gdzie} \quad \frac{F_2}{2}$$

jest kresem dolnym liczb ograniczających f_2 z góry w $\langle a, b\rangle$ to $\int_a^b f_1\, dx > F_2 h$ czyli

$$(2.25) \quad \int_a^b f_1 dx = F_2 h + E_2 \quad \text{gdzie} \quad E_2 > 0.$$

Ponieważ z (2.16) wynika nierówność

$$(2.26) \quad |D_1| \leqslant A_o + \frac{F_1}{2} = C_1 \quad \text{w} \quad P_1$$

więc stąd i z (2.23) oraz (2.25) mamy

$$(2.27) \quad 0 < E_2 + F_2 h \leqslant \int_a^b D_1 dx \leqslant C_1 h.$$

Mamy dalej

(2.28) $\quad 0 \leqslant \lambda_1(x,t) \leqslant M_1$

Nierówności (2.26), (2.24), (2.27), (2.28) są odpowiednikami nierówności (2.4), (2.5), (2.6), (2.7).

Tworząc ciąg funkcji $\{D_2^{(k)}\}$ analogicznie jak w (2.13) można udowodnić, że funkcje $D_2^{(k)}$ mają te same własności co funkcje $D_1^{(k)}$ czyli można wykazać, że dla $D_2^{(k)}$ zachodzą odpowiedniki własności (2.15), (2.14), (2.16), (2.17), (2.18) w obszarze P_2, gdzie t_2 określimy podobnie jak liczbę t_1. Wykażemy dalej, odpowiednik twierdzenia 2.1 dla funkcji $D_2 = \lim\limits_{k\to\infty} D_2^{(k)}$ i dla drugiego równania układu (2.1).

Załóżmy, że żadna z funkcji f_i nie jest identycznie równa zeru i że rozważać będziemy funkcje f_i tego rodzaju, że zawsze zachodzi implikacja:

jeżeli $\quad 0 \leqslant f_{i+1} \leqslant \frac{F_{i+1}}{2}$

gdzie $\frac{F_{i+1}}{2}$ jest kresem dolnym liczb ograniczających z góry f_{i+1} w $\langle a, b\rangle$

to $\quad \int\limits_a^b f_i dx > F_{i+1} h > 0$

czyli $\quad \int\limits_a^b f_i dx = F_{i+1} h + E_{i+1}$

gdzie $E_{i+1} > 0$.

Możemy wówczas powtarzać rozumowanie, które stosowaliśmy do wyznaczania funkcji D_1. Otrzymamy ciąg liczb $t_1, t_2, \ldots, t_n$ wyznaczających prostokąty $P_1, P_2, \ldots, P_n$, w których istnieją rozwiązania $D_1, \ldots, D_n$ odpowiednich równań układu (2.1). Przyjmując

$$t_o = \min (t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{2.29}$$

mamy prostokąt P_o, w którym istnieje rozwiązanie układu (2.1). Silne zawężenie klasy dopuszczalnych funkcji f_i wynika z fizykalnego znaczenia tych funkcji w rozważanym problemie.
W [1] zakłada się, że $f_i \equiv 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
W takim przypadku odpowiednie oszacowania będą nieco inne.

Załóżmy, że wyznaczyliśmy już w podany sposób funkcje $D_1, D_2, \ldots, D_j$ i że $f_{j+1} = 0$ gdzie $j \geqslant 1$.
Niech funkcja D_j spełnia nierówności

$$0 \leqslant D_j \leqslant C_j, \quad 0 \leqslant L_j < \int_a^b D_j dx < C_j h \quad \text{i niech} \quad 0 \leqslant \lambda_j \leqslant M_j.$$

Określamy prostokąt P_{j+1} przez zdefiniowanie liczby t_{j+1}.
W tym celu tworzymy równanie

$$t = \frac{L_j(1 + h)C_j \exp\left(\frac{M_j}{L_j} t\right)}{2C_j M_j \left[1 + (1 + h)\exp\left(\frac{M_j}{L_j} t\right)\right]}$$

które posiada dodatnie rozwiązanie $\bar{t}_{j+1}$. Oznaczając

$$A_j = (1 + h)\exp\left(\frac{M_j}{L_j}\right)\bar{t}_{j+1}, \quad \bar{\bar{t}}_{j+1} = \frac{L_j^2}{4hM_j(A_j + C_j)}$$

przyjmujemy $t_{j+1} = \min (\bar{t}_{j+1}, \bar{\bar{t}}_{j+1})$ i tym samym mamy określony prostokąt P_{j+1}.

Wykazujemy, że ciąg funkcji

$$D_{j+1}^{(k+1)} = \int_{0}^{t} \frac{\lambda_j(x,s)\left[D_j(x,s) - D_{j+1}^{(k)}(x,s)\right]}{\int_a^b \left[D_j(x,s) - D_{j+1}^{(k)}(x,s)\right] dx} ds$$

$$D_{j+1}^{(o)} = 0$$

spełnia nierówności

$$|D_{j+1}^{(k)}| < A_j$$

$$\left|\int_a^b (D_j - D_{j+1}^{(k)})dx\right| \leqslant (A_j + C_j)h$$

$$\left|\int_a^b (D_j - D_{j+1}^{(k)})dx\right| > \frac{1}{2} L_j$$

Można wykazać, że ciąg funkcji $\left\{D_{j+1}^{(k)}\right\}$ jest zbieżny w P_{j+1} do rozwiązania j-tego równania układu (2.1).

Funkcja D_{j+1} jest mierzalna, ograniczona, całkowalna. Wykazuje się, że istnieje przedział, w którym $D_{j+1} > 0$ więc

$$\int_a^b D_{j+1} dx > L_{j+1} > 0.$$

Można więc podobnie wykazać, że każde dalsze równanie ma również rozwiązanie w odpowiednim obszarze P_k, $k = j+1, \ldots, n$.

W ten sposób wykazaliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2

Jeśli funkcje D_o, λ_i, f_i spełniają wyżej wymienione założenia, to układ (1.1) posiada rozwiązanie w prostokącie P_o określonym związkami (2.2) i (2.29).

Twierdzenie 2.3

Układ (1.1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód

Przypuśćmy, że dwa ciągi $D_1, \ldots, D_n$, $D_1^*, \ldots, D_n^*$ są rozwiązaniem układu (2.1). Dla symetrii oznaczeń daną funkcję D_o będziemy również oznaczać przez D_o^* czyli przyjmujemy $D_o = D_o^*$.
Załóżmy, że $D_k = D_k^*$ dla $k \leqslant i < n$ gdzie $i \geqslant 1$ oraz że funkcje D_{i+1}, D_{i+1}^* spełniają wraz z funkcją $D_i = D_i^*$ i-te równanie układu (2.1). Oszacujemy różnicę D_{i+1} i D_{i+1}^*

$$|D_{i+1}-D_{i+1}^*| = \left|\int_o^t \lambda_i \frac{(D_i-D_{i+1})\int_a^b (D_i-D_{i+1}^*)dx-(D_i-D_{i+1}^*)\int_a^b (D_i-D_{i+1})dx}{\int_a^b (D_i-D_{i+1}^*)dx \int_a^b (D_i-D_{i+1})dx} ds\right|$$

Stosując nierówności (2.4), (2.6), (2.16), (2.17) i (2.18), które zachowują się po przejściu do granicy, mamy w P_o:

$$|D_{i+1}-D_{i+1}^*| \leqslant \frac{M_i}{H_i^2}\int_o^t\Big[|D_{i+1}^*-D_{i+1}|\int_a^b|D_i-D_{i+1}|dx +$$

$$+ |D_i-D_{i+1}|\int_a^b|D_{i+1}^*-D_{i+1}|dx\Big]ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{G_i M_i}{H_i^2} \int_0^t \left[|D_{i+1}^* - D_{i+1}| h + \int_a^b |D_{i+1}^* - D_{i+1}| dx \right] ds$$

Całkując tę nierówność względem x w przedziale $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy

$$\int_a^b |D_{i+1} - D_{i+1}^*| dx \leqslant \frac{G_i M_i h}{H_i^2} \int_0^t \left[\int_a^b |D_{i+1} - D_{i+1}^*| dx \right] ds$$

Wynika stąd, że $\int_a^b |D_{i+1} - D_{i+1}^*| dx = 0$ czyli $D_{i+1} = D_{i+1}^*$ prawie wszędzie w P_o co kończy dowód.

Łatwo oszacować błąd jaki popełnimy, gdy dokładne rozwiązanie układu (2.1) zastąpimy przybliżeniem (2.13). Po prostych przekształceniach otrzymujemy oszacowanie

$$|D_i - D_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{p_{i-1} H_{i-1}}{h} (2p_{i-1})^{k+1} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \quad \text{w } P_i$$

gdzie $p_i = \dfrac{M_i (C_i + C_{i+1}) h}{H_i^2}$

III. Pewne własności rozwiązania układu równań (2.1)

Twierdzenie 3.1

Rozwiązanie i-tego równania układu (2.1), gdzie D_{i-1} spełnia założenia (2.4), (2.6), (1.12), (1.13), zaś λ_{i-1} ma własności (1.4) a f_i własności (1.7) zależy w sposób ciągły od warunków początkowych i od współczynnika λ_{i-1} w następującym sensie:

Jeżeli D_i jest rozwiązaniem i-tego równania o współczynniku λ_{i-1} i spełnia warunek początkowy $D_i(x,0) = f_i(x)$ i jeżeli $D_i^{(m)}$

jest rozwiązaniem i-tego równania ze współczynnikiem $\lambda_{i-1}^{(m)}$ oraz spełnia warunek początkowy $D_i^{(m)}(x,0) = f_i^{(m)}(x)$ przy czym znana funkcja D_{i-1} jest w obydwu przypadkach taka sama a współczynniki λ_{i-1}, $\lambda_{i-1}^{(m)}$ są wspólnie ograniczone i jeśli

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \left|f_i^{(m)} - f_i\right| dx = 0 \quad \text{oraz} \tag{3.1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{P_0} \left|\lambda_{i-1}^{(m)} - \lambda_i\right| dxdt = 0 \tag{3.2}$$

to

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \left|D_i^{(m)} - D_i\right| dx = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq t_0$$

Dowód.

Na podstawie (2.1) i (2.22) mamy

$$\left|D_i^{(m)} - D_i\right| \leq \left|f_i^{(m)} - f_i\right| + \frac{1}{H_{i-1}^2} \int_0^t \Big|\lambda_{i-1}^{(m)}(D_{i-1}-D_i^{(m)}) \int_a^b (D_{i-1}-D_i)dx \cdot$$

$$- \lambda_{i-1}(D_{i-1}-D_i) \int_a^b (D_{i-1} - D_i^{(m)})\, dx\Big| dt$$

Stąd po odpowiednim zgrupowaniu i uwzględnieniu nierówności

$$|\lambda_{i-1}| < M_{i-1}, \quad \left|\lambda_{i-1}^{(m)}\right| < M_{i-1}, \quad |D_{i-1}| < C_{i-1}$$

$$|D_i| < B_i, \quad \left|D_i^{(m)}\right| < B_i$$

otrzymujemy

$$(3.3)\quad \left|D_i^{(m)}-D_i\right| \leqslant \left|f_i^{(m)}-f_i\right| + \frac{1}{H_{i-1}^2}\int_0^t\Big\{k_i\left|\lambda_{i-1}-\lambda_{i-1}^{(m)}\right| + $$

$$+ q_i\left|D_i-D_i^{(m)}\right| + r_i\int_a^b\left|D_i - D_i^{(m)}\right|dx\Big\}ds$$

gdzie

$$k_i = (C_{i-1}^2 + B_iC_{i-1} + B_i^2)h$$

$$q_i = M_{i-1}\,(C_{i-1} + B_i)\,h$$

$$r_i = M_{i-1}\,(C_{i-1} + 1)$$

Całkując (3.3) obustronnie względem x w przedziale $< a, b >$ i oznaczając

$$\int_a^b\left|f_i^{(m)} - f_i\right|dx = U_i^{(m)}$$

$$\frac{k_i}{H_{i-1}^2}\int_0^t\int_a^b\left|\lambda_{i-1} - \lambda_{i-1}^{(m)}\right|dxdt = V_i^{(m)}$$

$$\frac{k_i}{H_{i-1}^2}(q_i + h\cdot r_i) = W_i$$

mamy

$$\int_a^b\left|D_i^{(m)} - D_i\right|dx \leqslant U_i^{(m)} + V_i^{(m)} + W_i\int_0^t\int_a^b\left|D_i^{(m)} - D_i\right|dxds$$

Stąd według [4] mamy

$$\int_a^b \left| D_i^{(m)} - D_i \right| dx \leqslant \left(U_i^{(m)} + V_i^{(m)} \right) \exp \left(W_i t \right)$$

Z założeń (3.1) i (3.2) wynika, że $U_i^{(m)} \to 0$, $V_i^{(m)} \to 0$ więc dla $t \in \langle 0, t_o \rangle$

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \left| D_i^{(m)} - D_i \right| dx = 0$$

co kończy dowód.

Łatwo pokazać, że rozwiązanie posiada m.in. następujące własności:

1° Jeżeli funkcja λ_{i-1} spełnia warunek

$$\lambda_{i-1} > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \langle a, x_i) \rangle, \quad x_i < b, \quad t \geqslant 0$$

$$\lambda_{i-1} = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \langle x_i, b \rangle, \quad t \geqslant 0$$

to $D_i \equiv f_i$ dla $x \in \langle x_i, b \rangle$

2° Jeżeli $\lambda_{i-1} \neq 0$ prawie wszędzie dla $x \in \langle a, x_i \rangle$, $t \geqslant 0$

$D_{i-1} \neq 0$ prawie wszędzie dla $x \in \langle a, x_i \rangle$, $t \geqslant 0$

to $D_i \neq 0$ prawie wszędzie dla $x \in \langle a, x_i \rangle$, $t \geqslant 0$

3° Jeżeli $\frac{\partial D_{i-1}}{\partial x} \geqslant 0$ w $Q = \langle a, x_o \rangle \times \langle 0, t_o \rangle$ gdzie $x_o < b$

oraz λ_{i-1} posiada dla prawie każdego x pochodną względem x równą zeru oraz $f_i' \geqslant 0$ w przedziale $\langle a, x_o \rangle$

to $\frac{\partial D_i}{\partial x} \geqslant 0$ w $Q' = \langle a, x' \rangle \times \langle 0, t_o \rangle$ gdzie $x' \leqslant x_o$.

4° Prawdziwe jest również twierdzenie z przeciwnymi nierównościami.

5° Jeżeli λ_{i-1} jest różniczkowalna i malejąca względem x oraz $\frac{\partial D_{i-1}}{\partial x} < 0$ i $\frac{\partial D_{i-1}}{\partial t} \geqslant 0$ w pewnym przedziale $a < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < b$ dla $0 \leqslant t < t_o$ i jeśli ponadto f_i maleje w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$ to $\frac{\partial D_i}{\partial x} < 0$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $t \in \langle 0, t_o\rangle$

6° Jeżeli $\frac{\partial D_{i-1}}{\partial t} \geqslant 0$, $\lambda_{i-1} \geqslant 0$, $f_i \leqslant f_{i-1}$ w P_o to $D_{i-1} - D_i \geqslant 0$ oraz $\frac{\partial D_i}{\partial t} \geqslant 0$ w P_o

7° Jeżeli $\lambda_i \geqslant 0$ w P_o dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$f_{i+1} \leqslant f_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$\frac{\partial D_o}{\partial t} \geqslant 0$ w P_o

to $D_o \geqslant D_1 \geqslant \ldots \geqslant D_n$ w P_o.

8° Przy założeniach przyjętych w 6° funkcja $\int_a^b D_i\,dx$ jest niemalejąca względem t.

9° Funkcje $\int_a^b D_i dx$ są absolutnie ciągłe.

10° Rozwiązanie składa się z funkcji nieujemnych.
Wniosek ten otrzymamy po przekształceniu układu (1.1) traktując kolejno równania jako liniowe względem D_i.

11° Jeżeli $\lambda_{i-1} \geqslant m_{i-1} > 0$ prawie wszędzie dla $x \in \langle a,b\rangle$, $t \geqslant 0$ i jeśli istnieje skończona liczba T_{i-1} taka, że funkcja $D_{i-1}(x,t)$ jest stała względem t dla $t > T_{i-1}$, $x \in \langle a,b\rangle$ to istnieje taka skończona liczba T_i, że funkcja $D_i(x, t)$ jest stała względem t dla $t > T_i$, $x \in \langle a, b\rangle$.

12^o Jeżeli $\lambda_{i-1} < M_{i-1}$ i jeśli istnieje staka stała $T_i(M_{i-1})$ że funkcja $D_i(x,t)$ nie zależy od zmiennej t dla $t > T_i(M_{i-1})$, $x \in \langle a, b \rangle$ to $T_i(M_{i-1})$ rośnie, gdy M_{i-1} maleje oraz $T_i(0) = +\infty$.

13^o Jeżeli

a) funkcja $\frac{\partial D_{i-1}}{\partial t}$ jest ograniczona

b) funkcja $D_i(x,t)$ jest określona dla $t \in \langle 0, +\infty)$

c) istnieje taka skończona liczba T_i, że funkcja $D_i(x,t)$ nie zależy od zmiennej t dla $t > T_i$, $x \in \langle a, b \rangle$

d) funkcja λ_{i-1} jest ograniczona i spełnia warunki

$$\lambda_{i-1} > 0 \quad i \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_{i-1} > 0 \quad dla \quad a \leqslant x \leqslant x_o < b$$

$$\lambda_i = 0 \quad dla \quad x > x_o, \quad t > 0$$

to $\lim\limits_{t\to\infty} (D_{i-1} - D_i) = 0$ dla $a \leqslant x \leqslant x_o$

oraz $D_i = f_i$ dla $x_o < x \leqslant b$, $t > 0$.

Własności 11^o - 13^o rozwiązania układu (1.1) są istotne w badaniach fizykalnego problemu, który opisuje układ (1.1).

IV. Pewne uogólnienie układu równań (1.1)

Łatwo można pokazać, że wszystkie powyższe rozważania (twierdzenia, wnioski i sama metoda) przenoszą się z niewielkimi modyfikacjami gdy zamiast układu (1.1) rozważać będziemy układ ogólniejszy a mianowicie:

$$(4.1) \qquad \frac{\partial D_i}{\partial t} \int_a^b H_i[D_{i-1}(y,t);\ D_i(y,t)]\, dy =$$

$$= \lambda_{i-1}(x,t)\, H_i[D_{i-1}(x,t);\ D_i(x,t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

lub nawet jeszcze ogólniejszy.

Tutaj o danych funkcjach H_i zakładamy, że w każdym skończonym prostokącie $0 \leqslant p \leqslant p_o$, $0 \leqslant q \leqslant q_o$

(4.2) $H_i(p,q)$ są nieujemne i nie równe tożsamościowo zeru w żadnym obszarze miary dodatniej, wspólnie ograniczone, mierzalne, ciągłe względem p,q i spełniają warunek Lipschitza względem zmiennej q.

Zakładamy ponadto, że $H_i(p,q)$ mają następującą własność: dla dowolnych funkcji $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ określonych, nieujemnych w półstrefie $x \in \langle a,b \rangle$, $t \in \langle 0, +\infty)$ i takich, że $\int_a^b H_i(\varphi, \psi)\, dx$ istnieje, zachodzi nierówność

(4.3) $$\int_a^b H_i(\varphi,\psi)\, dx \geqslant d_i > 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0.$$

Przyjmujemy, że funkcje $\lambda_i(x,t)$ spełniają założenia (1.4) Do układu (4.1) dołączamy warunki początkowe

(4.4) $D_i(x,0) = f_i(x) \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$

Dane funkcje $f_i(x)$ spełniają założenia (1.7).

LITERATURA

[1] Bodziony J. - Mathematische Erfassung des Siebvorganges, Berg akademie, 2, 1961, str. 90-101.

[2] Szarski J. - On an integro-differential equation, Annales Polonici Mathematici, t. XIV, z. 3 1964, str. 321-333.

[3] Gołąb St., Bodziony J. - On an integro-differential equation of the theory of a screening of granular bodies, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 4(13), 1961, str. 529-554.

[4] Opial Z. - Sur un système d'inégalités intégrales, Annales Polonici Mathematici, z. 3, 1957, str. 200-209.

О ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено систему интегрально-дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2), (1.3).

Эта система возникла с механических исследований процесса просеивания сыпучих материалов через n сит последовательно расположенных [1]. Доказано, что система имеет решение и только одно, сообщено также свойства решения (III, 1^{o}-13^{o}).

ON SOME SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

The paper deals with the system of integro-differential equations (1.1) with the initial conditions (1.2), (1.3). This system characterizes the process of screening of granular bodies through n screens. It is proved: the uniqueness of solution of the system and properties (III, 1^{o} - 13^{o}) of the solution.