ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

WIESŁAW SOBIESZEK

O ROZWIĄZANIU RÓWNANIA $f(x) = \max\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} \{g(y)+h(x-y)+ f[ay+b(x-y)]\}$ W PRZYPADKU FUNKCJI WKLESŁYCH

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy jest następujące równanie funkcyjne programowania dynamicznego

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{g(y)+h(x-y)+f[(a-b)y + bx]\} \tag{1}$$

gdzie g i h są danymi funkcjami, zaś a i b danymi liczbami. Przez $f(x)$ oznaczona jest funkcja szukana.

W całej niniejszej pracy obowiązywały będą następujące założenia:

(a) $g(x)$ i $h(x)$ są funkcjami ciągłymi dla $x \geqslant 0$

(b) $g(0) = h(0) = 0$

(c) $0 < a < b < 1$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m(c^n x) < \infty$, gdzie $m(x) = \max\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} \max (|g(y)|, |h(y)|)$

W monografii [1] dowodzi się, że przy założeniach od (a) do (d) równanie (1) posiada jednoznaczne i ciągłe rozwiązanie, spełniające warunek $f(0) = 0$. W dalszych rozważaniach $y(x) \in [0,x]$ oznaczać będzie dowolną funkcję spełniającą warunek

$$f(x) = g[y(x)] + h[x-y(x)] + f[(a-b)y(x)+bx], \tag{2}$$

gdzie $f(x)$ jest rozwiązaniem równania (1). Jeżeli funkcja $y(x)$ jest znana, wówczas rozwiązanie równania (1) sprowadza się do rozwiązania zwykłego równania funkcyjnego (2). Praktycznie jednak, ze znalezieniem funkcji $f(x)$ wiąże się ściśle problem znalezienia funkcji $y(x)$. W zasadzie jedyną metodą, którą posługiwano się dotychczas, przy uzyskiwaniu jakichkolwiek wyników dotyczących równania (1), była klasyczna metoda kolejnych przybliżeń. Wszystkie wyniki uzyskane w tej pracy, zarówno nowe (p. tw. (1), (2), (3), (4), (5) i (6)) jak i uogólnienia znanych (p. tw. 7 oraz równanie 16), nie są uzyskane w oparciu o metodę kolejnych przybliżeń. Szczegółowiej wyniki uzyskane w tej pracy omówimy niżej.

2. O strukturze funkcji $f(x)$ i $y(x)$ w przypadku wklęsłych funkcji g i h

Z założenia wklęsłości lub silnej wklęsłości funkcji g i h, wynika odpowiednio wklęsłość lub silna wklęsłość funkcji f (p. [1]). W przypadku silnej wklęsłości funkcji g i h, a tym samym i funkcji f, funkcja $y(x)$ jest jednoznaczna. Z jednoznaczności funkcji $y(x)$ wynika jej ciągłość (p. [2]).

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są wklęsłe oraz posiadają prawostronnie ciągłe pochodne jednostronne $g'_+(x)$ i $h'_+(x)$ w przedziale $[0, \infty)$, to

$$f'_+(x) \geqslant \frac{1}{a-b}\left\{ah'_-[x-y(x)]-bg'_+[y(x)]\right\}, \text{ gdy } y(x) < x^{1)} \tag{3}$$

$$f'_-(x) \leqslant \frac{1}{a-b}\left\{ah'_+[x-y(x)]-bg'_-[y(x)]\right\}, \text{ gdy } y(x) > 0 \tag{4}$$

---

1) Zauważmy, że z założenia $y(x) < x$ lub $y(x) > 0$ wynika dodatniość tych x dla których spełniona jest nierówność (3) lub (4).

Dowód:

Utwórzmy iloraz różnicowy dla funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie $x_o > 0$.

$$\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_o+\Delta x)-f(x_o)\right] = \frac{1}{\Delta x}\Big\{g\left[y(x_o+\Delta x)\right]+h\left[x_o+\Delta x-y(x_o+\Delta x)\right] +$$

$$+ f\left[(a-b)y(x_o+\Delta x) + b(x_o+\Delta x)\right]-g\left[y(x_o)\right]-h\left[x_o-y(x_o)\right] -$$

$$-f\left[(a-b)y(x_o) + bx_o\right]\Big\}$$

Jeżeli $y(x_o) < x_o$, to dla dostatecznie małego przyrostu $\Delta x > 0$, mamy

$$0 < \frac{-b}{a-b}\Delta x \leqslant x_o-y(x_o), \quad \text{gdyż} \quad a < b \quad \text{(p. zał. (c))}$$

Stąd

$$0 < y(x_o) - \frac{b\Delta x}{a-b} < x_o + \Delta x$$

Korzystając z optymalności funkcji $y(x)$ i powyższej nierówności mamy

$$g\left[y(x_o+\Delta x)\right]+h\left[x_o+\Delta x-y(x_o+\Delta x)\right]+f\left[(a-b)y(x_o+\Delta x)+b(x_o+\Delta x)\right] \geqslant$$

$$g\left[y(x_o) - \frac{b\Delta x}{a-b}\right]+h\left[x_o+\Delta x-y(x_o) + \frac{b\Delta x}{a-b}\right]+f\left\{(a-b)\left[y(x_o) - \frac{b\Delta x}{a-b}\right] +bx_o\right\}$$

Stąd dla ilorazu różnicowego funkcji $f(x)$, otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_o+\Delta x)-f(x_o)\right] \geqslant \frac{1}{\Delta x}\Big\{g\left[y(x_o) - \frac{b\Delta x}{a-b}\right]-g\left[y(x_o)\right]+h\left[x_o-y(x_o) + \frac{a\Delta x}{a-b}\right]-$$

$$+ h\left[x_o-y(x_o)\right]\Big\}$$

Z silnej wklęsłości funkcji g, h i f dla $x \geqslant 0$, wynika istnienie i odpowiednio jednostronna ciągłość pochodnych $g'_+(x)$, $h'_+(x)$, $g'_-(x)$ $h'_-(x)$, $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ dla $x > 0$, przy czym pochodne $g'_+(x)$ i $h'_+(x)$ są, na mocy założenia, ciągłe również w przedziale $[0,\infty)$. Przechodząc w ostatniej nierówności do granicy przy $\Delta x \to 0+$ otrzymujemy nierówność (3). Dowód nierówności (4) jest analogiczny.

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są silnie wklęsłe i posiadają ciągłe prawostronnie pochodne jednostronne $g'_+(x)$ i $h'_+(x)$ w przedziale $[0,\infty)$, to funkcja $y(x)$ jest niemalejąca w przedziale $(0,\infty)$.

Dowód:

Przypuśćmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Istnieją wówczas punkty x_1 i x_2, spełniające nierówność $0 < x_1 < x_2$,[2] dla których

$$y(x_1) > y(x_2)$$

Ponieważ $y(x_2) < y(x_1) \leqslant x_1 < x_2$, więc na mocy (3) otrzymujemy

$$f'_+(x_2) \geqslant \frac{1}{a-b}\left\{ah'_-\left[x_2-y(x_2)\right]-bg'_+\left[y(x_2)\right]\right\}$$

Z drugiej strony, ponieważ $y(x_1) > y(x_2) \geqslant 0$, otrzymujemy na mocy (4)

$$f'_-(x_1) \leqslant \frac{1}{a-b}\left\{ah'_+\left[x_1-y(x_1)\right]-bg'_-\left[y(x_1)\right]\right\}$$

[2] Ponieważ funkcja $y(x)$ jest ciągła w przedziale $[0,\infty)$, więc wystarczy udowodnić jej monotoniczność w przedziale $(0,\infty)$.

Z silnej wklęsłości funkcji g i h wynikają nierówności

$$h'_-[x_2-y(x_2)] < h'_+[x_1-y(x_1)], \quad \text{gdyż} \quad x_2-y(x_2) > x_1-y(x_1)$$

$$g'_+[y(x_2)] > g'_-[y(x_1)], \quad \text{gdyż} \quad y(x_1) > y(x_2)$$

Stąd, ponieważ $a < b$, otrzymujemy dla pochodnych jednostronnych funkcji silnie wklęsłej nierówność

$$f'_+(x_2) > f'_-(x_1),$$

co niemożliwe.

Twierdzenie 3

Jeżeli $g(x)$ i $h(x)$ są funkcjami silnie wklęsłymi i różniczkowalnymi dla $x \geqslant 0$, to

$$f'(x) = \frac{1}{a-b}\left\{ah'[x-y(x)] - bg'[y(x)]\right\} \quad \text{dla} \quad x \in A \tag{5}$$

$$f'[(a-b)y(x)+bx] = \frac{1}{a-b}\left\{h'[x-y(x)] - g'[y(x)]\right\} \quad \text{dla} \quad x \in A \tag{6}$$

$y(x)$ jest funkcją rosnącą w zbiorze A, (7)

gdzie $A = \left\{x:\ 0 < y(x) < x\right\}$

Dowód:

Dla dowolnego $x \in A$, mamy na mocy (3) i (4)[3] nierówność

$$f'_+(x) \geqslant \frac{1}{a-b}\left\{ah'[x-y(x)] - bg'[y(x)]\right\} \geqslant f^{\Delta}(x)$$

[3] Z różniczkowalności i wklęsłości funkcji g i h w przedziale $[0,\infty)$ wynika istnienie i prawostronna ciągłość pochodnych g'_+ i h'_+.

Z drugiej strony, ponieważ funkcja $f(x)$ jest silnie wklęsła, mamy

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(x)$$

Z powyższych nierówności wynika równość (5).

Dla dowolnego $x \in A$ z optymalności funkcji $y(x)$ wynika, że pochodna lewostronna funkcji $g(y)+h(x-y)+f[(a-b)y+bx]$, względem zmiennej y, jest nieujemna dla $y = y(x)$, zaś pochodna prawostronna niedodatnia.

Stąd otrzymujemy odpowiednio nierówności

$$g'[y(x)] - h'[x-y(x)] + (a-b)\, f'_+[(a-b)\, y(x) + bx] \geqslant 0,$$

$$g'[y(x)] - h'[x-y(x)] + (y-b)\, f'_-[(a-b)\, y(x) + bx] \leqslant 0,$$

z których wynika równość (6).

Przypuśćmy, że funkcja $y(x)$ nie jest rosnąca w zbiorze A. Wówczas istnieją punkty $x_1, x_2 \in A$, spełniające nierówność $0 < x_1 < x_2$, dla których

$$y(x_1) \geqslant y(x_2)$$

Stąd, z (5) i z silnej wklęsłości funkcji g i h, mamy

$$f'(x_1) = \frac{1}{a-b}\left\{ah'[x_1-y(x_1)] - bg'[y(x_1)]\right\} < \frac{1}{a-b}\left\{ah'[x_2-y(x_2)] - \right.$$

$$\left. - bg'[y(x_2)]\right\} = f'(x_2)$$

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność daje sprzeczność z własnością pochodnej funkcji silnie wklęsłej.

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geqslant 0$, to warunkiem koniecznym na to by w pewnym prawostronnym sąsiedztwie zera:

1° $y(x) = 0$ jest aby $\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}$

2° $0 < y(x) < y$ jest aby $\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b}$

3° $y(x)$ jest aby $\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(0)}{1-b}$

Dowód:

Jeżeli w pewnym prawostronnym sąsiedztwie zera jest $y(x) = 0$, to

$$f(x) = h(x) + f(bx)$$

Stąd iterując otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(b^n x)$$

Istnieje więc w rozważanym sąsiedztwie pochodna funkcji $f(x)$ dana wzorem

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^n x)$$

Z drugiej strony z optymalności funkcji $y(x) = 0$, wynika zachodzenie w rozważanym sąsiedztwie nierówności

$$g'(0) - h'(x) + (a-b)f'(bx) \leqslant 0$$

Stąd oraz z silnej wklęsłości funkcji $f(x)$ i $h(x)$ oraz założenia (c), otrzymujemy

$$0 \geqslant g'(0) - h'(x) + (a-b)f'(bx) > g'(0) - h'(0) + (a-b)f'(0)$$

Ponieważ

$$f'(0) = h'(0) \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{h'(0)}{1-b},$$

więc ostatecznie otrzymujemy nierówność

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}$$

Przypuśćmy teraz, że w pewnym prawostronnym sąsiedztwie zera $y(x)$ spełnia nierówność

$$0 < y(x) < x$$

Wówczas z (5) i (6) otrzymujemy odpowiednio

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \frac{1}{a-b}\left[ah'(0) - bg'(0)\right] \text{ i } \lim_{x \to 0+} f'(x) = \frac{1}{a-b}\left[h'(0) - g'(0)\right]$$

Stąd

$$\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b}$$

Przypuśćmy teraz, że w pewnym prawostronnym sąsiedztwie zera jest $y(x) = x$. Wówczas dla x-ów z tego sąsiedztwa mamy

$$f(x) = g(x) + f(ax)$$

Stąd iterując otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(a^n x)$$

Istnieje więc, w rozważanym sąsiedztwie, pochodna funkcji $f(x)$. Z optymalności funkcji $y(x) = x$, wynika zachodzenie w rozważanym sąsiedztwie nierówności

$$g'(x) - h'(0) + (a-b)f'(ax) \geqslant 0$$

Ponieważ

$$g'(x) = f'(x) - af'(ax),$$

więc z ostatniej nierówności i silnej wklęsłości funkcji $f(x)$ mamy

$$0 \leqslant f'(x) - h'(0) - bf'(ax) < (1-b)f'(ax) - h'(0) < (1-b)f'(0) - h'(0)$$

Stąd, uwzględniając równość

$$\frac{g'(0)}{1-a} = f'(0),$$

otrzymujemy nierówność

$$\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(0)}{1-b}$$

Twierdzenie 5

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geqslant 0$ i jeżeli

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b},$$

to

$$y(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0, \quad \text{gdy} \quad \frac{g'(0)}{1-a} \leqslant \frac{h'(\infty)}{1-b}.$$

albo

$$y(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \quad \text{i} \quad 0 < y(x) < x \quad \text{dla} \quad x > x_0,$$

$$\text{gdy} \quad \frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(\infty)}{1-b}$$

gdzie x_0 jest jednoznacznym pierwiastkiem równania

$$g'(0) - h'(x) + (a-b) \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^{n+1}x) = 0 \tag{8}$$

<u>Dowód:</u>

Na wstępie udowodnimy istnienie prawostronnego sąsiedztwa zera w którym $y(x) = 0$. Przypuśćmy, że nie istnieje wyżej wspomniane sąsiedztwo zera. Wówczas, ponieważ funkcja $y(x)$ jest ciągła i na mocy twierdzenia 2 niemalejąca, musi być

$$0 < y(x) \leqslant x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

Ponieważ przypuszczenie, że istnieje prawostronne sąsiedztwo zera, w którym $y(x) = x$, pociąga za sobą, na mocy twierdzenia 4, nierówność $\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(0)}{1-b}$ sprzeczną z założeniem, więc istnieje ciąg $x_n \to 0+$ taki, że

$$0 < y(x_n) < x_n$$

Stąd na mocy (5) i (6) mamy odpowiednio

$$f'(x_n) = \frac{1}{a-b}\left\{ah'\left[x_n - y(x_n)\right] - bg'\left[y(x_n)\right]\right\}$$

$$f'\left[(a-b)y(x_n)+bx_n\right] = \frac{1}{a-b}\left\{h'\left[x_n - y(x_n)\right] - g'\left[y(x_n)\right]\right\}$$

Z powyższego i z równości granic

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} f'\left[(a-b)y(x_n) + bx_n\right]$$

otrzymujemy równość

$$\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b}$$

sprzeczną z założeniem.

Ponieważ pokazaliśmy, że w pewnym prawostronnym sąsiedztwie zera jest $y(x) = 0$, więc z monotoniczności funkcji $y(x)$ wynika możliwość zaistnienia dwóch następujących przypadków

1° $y(x) = 0$ dla $x \geqslant 0$

2° $y(x)\begin{cases} = 0 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ > 0 & \text{dla } x > x_0 \end{cases}$ - gdzie $x_0 > 0$

Wykażemy, że o ile punkt x_0 istnieje, to jest jednoznacznym pierwiastkiem równania

$$H(x) = 0, \text{ gdzie } H(x) = g'(0) - h'(x) + (a-b)\sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^{n+1}x)$$

Istotnie, przechodząc w (6) do granicy przy $x \to x_0+$, mamy

$$\lim_{x\to x_0+} f'\left[(a-b)y(x)+bx\right] = \frac{1}{a-b}\left[h'(x_0) - g'(0)\right]$$

Z drugiej strony, ponieważ $y(x) = 0$ dla $0 \leqslant x \leqslant x_0$, więc istnieje pochodna funkcji $f(x)$ dana wzorem

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^n x) \quad \text{dla} \quad 0 < x < x_0$$

Stąd dla punktu $bx_0 < x_0$, mamy

$$f'(bx_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^{n+1} x_0)$$

Z równości $\lim\limits_{x \to x_0+} f'\left[(a-b)y(x)+bx\right] = f'(bx_0)$ wynika, że $H(x_0) = 0$

Ponieważ funkcja $H(x)$ jest rosnąca oraz

$$H(0) = (1-a)\left[\frac{g'(0)}{1-a} - \frac{h'(0)}{1-b}\right] \text{ i } H(\infty) = (1-a)\left[\frac{g'(0)}{1-a} - \frac{h'(\infty)}{1-b}\right],$$

więc równanie $H(x) = 0$ nie ma pierwiastka dodatniego, gdy

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b} \quad \text{i} \quad \frac{g'(0)}{1-a} \leqslant \frac{h'(\infty)}{1-b}$$

lub istnieje jednoznaczny pierwiastek dodatni- gdy

$$\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b} \quad \text{i} \quad \frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(\infty)}{1-b}$$

Dla pełnego dowodu twierdzenia, należy jeszcze wykazać, że

$$y(x) < x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

Przypuśćmy, że powyższa nierówność nie jest prawdziwa. Wówczas, ponieważ funkcja $y(x)$ jest ciągła i na mocy (7) rosnąca w pewnym

prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0, musiałby istnieć punkt $x_1 > x_0$ taki, że

$$y(x_1) = x_1 \quad \text{i} \quad 0 < y(x) < x_1 \quad \text{dla} \quad x_0 < x < x_1$$

Stąd oraz z (5) mamy

$$f'_-(x_1) = \left[\frac{1}{a-b}\, ah'(0) - bg'(x_1)\right]$$

Z drugiej strony ponieważ

$$ay(x) + b\left[x-y(x)\right] < ay(x) < ax_1 \quad \text{dla} \quad x_0 < x < x_1$$

więc z (6) mamy

$$f'_-(ax_1) = \frac{1}{a-b}\left[h'(0) - g'(x_1)\right]$$

Ponieważ $ax_1 < x_1$ i funkcja $f(x)$ jest silnie wklęsła, więc

$$f'(x_1) < f'(ax_1)$$

Stąd

$$\frac{1}{a-b}\left[ah'(0) - bg'(x_1)\right] < \frac{1}{a-b}\left[h'(0) - g'(x_1)\right]$$

Korzystając z silnej wklęsłości funkcji g i ostatniej nierówności, mamy

$$h'(0)(1-a) < g'(x_1)1-b) < g'(0)(1-b),$$

co sprzeczne z założeniem $\frac{g'(0)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}$.

Wniosek 1

Jeżeli funkcje g i h spełniają założenia twierdzenia 5, to w przypadku $\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(\infty)}{1-b}$ jest

$$g'\left[y(x)\right] - h'\left[x-y(x)\right] + (a-b)\sum_{n=0}^{\infty} b^n h'\left[b^n(a-b)y(x) + + b^{n+1}x\right] = 0 \tag{9}$$

dla $x_0 \leqslant x < \bar{x}$

$$g'\left[y(x)\right] - h'\left[x-y(x)\right] + ah'\left\{(a-b)y(x) + bx - y\left[(a-b)y(x) + bx\right]\right\} - \\ - bg'\left\{y\left[(a-b)y(x) + bx\right]\right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant \bar{x} \tag{10}$$

gdzie x_0 jest jednoznacznym pierwiastkiem równania (8), zaś $\bar{x}$ równania

$$(a-b)y(x) + bx = x_0 \tag{11}$$

Dowód:

Z twierdzenia 5 i z (5) wynika, że pochodna funkcji $f(x)$ dana jest wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^n x) & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ \frac{1}{a-b}\left\{ah'\left[x-y(x)\right] - bg'\left[y(x)\right]\right\} & \text{dla} \quad x > x_0 \end{cases}$$

Pokażemy, że $f'(x)$ jest ciągła dla $x \geqslant 0$. W tym celu wystarczy pokazać, że $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Istotnie

$$f'_-(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^n x_0) = h'(x_0) + b\sum_{n=0}^{\infty} b^n h'(b^{n+1}x_0) = h'(x_0) + \\ + \frac{b}{a-b}\left[h'(x_0) - g'(0)\right] = \frac{1}{a-b}\left\{ah'(x_0) - bg'(0)\right\} = f'_+(x_0)$$

Z monotoniczności i ciągłości funkcji $y(x)$ wynika istnienie i jednoznaczność pierwiastka x_0 równania (11). Zauważmy, że

$$0 \leqslant (a-b)y(x) + bx \leqslant x_0 \qquad \text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$$

$$(a-b)y(x) + bx \geqslant x_0 \qquad \text{dla} \quad x \geqslant \bar{x}$$

Stąd i ze wzoru na $f'(x)$ mamy

$$(a-b)f'\left[(a-b)y(x)+bx\right] = \begin{cases} (a-b)\sum_{n=0}^{\infty} b^n h'\left[b^n(a-b(y(x)+b^{n+1}x\right] \text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \\ ah'\left\{(a-b)y(x)+bx-y\left[(a-b)y(x)+bx\right]\right\} - \\ bg'\left\{y\left[(a-b)y(x)+bx\right]\right\} \quad \text{dla} \quad x \geqslant \bar{x} \end{cases}$$

co wraz z (6), daje odpowiednio (9) i (10).

Twierdzenie 6

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geqslant 0$ i jeżeli

$$\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b},$$

to

$$0 < y(x) < x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

Dowód:

Na wstępie zauważmy, że gdyby istniał punkt $x_0 > 0$ i taki, że $y(x) = 0$ lub sąsiedztwo prawostronne zera, w którym $y(x) = x$, otrzymalibyśmy w obu wypadkach, na mocy twierdzenia 4, nierówności sprzeczne z założeniem.

Wobec tego niech

$$0 < y(x) \leqslant x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

przy czym w żadnym sąsiedztwie prawostronnym zera, nie może być $y(x) = x$. Istnieje wówczas punkt $x^* > 0$ i taki, że

$$0 < y(x^*) < x^*$$

Ponieważ funkcja $y(x)$ jest ciągła, niemalejąca i spełnia nierówność $0 < y(x) \leqslant x$, więc gdyby nierówność $0 < y(x) < x$ nie była prawdziwa, musiałby istnieć punkt $x_1 \in (0, x^*)$ taki, że

$$y(x_1) = x_1$$

$$0 < y(x) < x \quad \text{dla} \quad x \in (x_1, x^*>$$

lub punkt $x_2 \in (x^*, \infty)$ taki, że

$$y(x_2) = x_2$$

$$0 < y(x) < x \quad \text{dla} \quad x \in < x^*, x_2$$

Wykażemy, że w obu wypadkach otrzymamy sprzeczność z założeniem. Istotnie na mocy (5) mamy

$$f'(x) = \frac{1}{a-b}\left\{ah'\left[x-y(x)\right] - bg'\left[y(x)\right]\right\} \quad \text{dla} \quad x \in (x_1, x^*>$$

zaś na mocy (6)

$$f'\left[(a-b)y(x) + bx\right] = \frac{1}{a-b}\left\{h'\left[x-y(x)\right] - g'\left[y(x)\right]\right\} \text{dla } x \in (x_1, x^*>$$

Stąd przechodząc do granicy, przy $x \to x_1-$, otrzymujemy

$$f'_+(x_1) = \frac{1}{a-b}\left[ah'(0) - bg'(x_1)\right]$$

$$f'_+(ax_1) = \frac{1}{a-b}\left[h'(0) - g'(x_1)\right]$$

Z powyższych równości i nierówności

$$f'_+(x_1) < f'_+(ax_1)$$

mamy

$$h'(0)(1-a) < g'(x_1)(1-b) < g'(0)(1-b)$$

co sprzeczne z założeniem $\frac{g'(0)}{1-a} = \frac{h'(0)}{1-b}$. Analogicznie uzyskujemy sprzeczność dla punktu x_2.

Wniosek 2

Jeżeli funkcje g i h spełniają założenia twierdzenia 6, to

$$g'\left[y(x)\right] - h'\left[x-y(x)\right] + ah'\left\{(a-b)y(x)+bx - y\left[(a-b)y(x)+bx\right]\right\} - \\ - bg'\left\{y\left[(a-b)y(x)+bx\right]\right\} \quad \text{dla} \quad x > 0 \tag{12}$$

Dowód wynika z twierdzenia 6, z (5) i (6).

Twierdzenie 7

Jeżeli funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są silnie wklęsłe i różniczkowalne w sposób ciągły dla $x \geqslant 0$ i jeżeli

$$\frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(0)}{1-b},$$

to

$$y(x) = x \quad \text{dla} \quad x > 0, \quad \text{gdy} \quad \frac{g'(\infty)}{1-a} \geqslant \frac{h'(0)}{1-b}$$

albo

$$y(x) = x \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \quad \text{i} \quad 0 < y(x) < x \quad \text{dla} \quad x > x_0,$$

$$\text{gdy} \quad \frac{g'(\infty)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}$$

gdzie x_0 jest jednoznacznym pierwiastkiem równania

$$g'(x) - h'(0) + (a-b)\sum_{n=0}^{\infty} a^n g'(a^{n+1}x) = 0 \tag{13}$$

<u>Wniosek 3</u>

Jeżeli funkcje g i h spełniają założenia twierdzenia 7, to w przypadku

$$\frac{g'(\infty)}{1-a} \geqslant \frac{h'(0)}{1-b}$$

jest

$$g'[y(x)] - h'[x-y(x)] + (a-b)\sum_{n=0}^{\infty} a^n g'[a^n(a-b)y(x) + a^n bx] = 0 \tag{14}$$

$$\text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$$

$$g'[y(x)] - h'[x-y(x)] + ah'\{(a-b)y(x)+bx-y[(a-b)y(x)+bx]\} - \\ - bg'\{y[(a-b)y(x)+bx]\} \quad \text{dla} \quad x \geqslant \bar{x} \tag{15}$$

gdzie x_0 jest jednoznacznym pierwiastkiem równania (12), zaś $\bar{x}$ równania (11).

Dowody twierdzenia 7 i wniosku 3, są analogiczne do dowodów odpowiednio twierdzenia 5 i wniosku 1.

W monografii [1] znajduje się nieścisły szkic dowodu twierdzenia 7, przy dodatkowym założeniu monotoniczności funkcji g i h. Zaznaczyć należy, że twierdzenie 7 jest uogólnieniem odpowiedniego twierdzenia znajdującego się w [1] nie tylko z powodu monotoniczności funkcji g i h, lecz także ze względu na zastąpienie założenia $g'(\infty) < h'(0)$ założeniem $\frac{g'(\infty)}{1-a} < \frac{h'(0)}{1-b}$.

Uwaga

Twierdzenia 5, 6 i 7 oraz wnioski 1, 2 i 3 prawdziwe są także przy założeniu $a > b$, co łatwo stwierdzić zamieniając rolami argumenty y i x-y oraz liczby a i b.

Przykład ilustrujący zastosowanie udowodnionych twierdzeń i wniosków

Rozważmy równanie

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \left\{ cy - y^2 + d(x-y) - (x-y)^2 + f\left[(a-b)y + bx\right] \right\}, \quad f(0) = 0, \tag{16}$$

gdzie $c, d > 0$ i $\frac{c}{1-a} < \frac{d}{1-b}$.

Równanie (8) ma postać

$$c - d + (a-b) \sum_{n=0}^{\infty} b^n (d - 2b^{n+1} x) = 0$$

Stąd wyliczamy pierwiastek

$$x_0 = \frac{(1+b)\left[d(1-a) - c(1-b)\right]}{2\,(1-ab)}$$

Zakładając, że

$$y(x) = y_1(x) = \alpha_1(x-x_0) \quad \text{dla} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \bar{x},$$

gdzie α_1 i $\bar{x}$ są stałymi, które wyznaczamy odpowiednio z tożsamości (9) i równania (11). Po łatwych rachunkach otrzymujemy

$$\alpha_1 = \frac{1-ab}{2(1-ab)+a^2-b^2} \quad \text{i} \quad \bar{x} = \frac{x_0[1+\alpha_1(a-b)]}{b+\alpha_1(a-b)}$$

Następnie przewidujemy funkcję $y(x)$ w postaci

$$y(x) = y_2(x) = \alpha_2(x-\bar{x})+\alpha_1(\bar{x}-x_0) \quad \text{dla} \quad \bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}},$$

gdzie α_2 i $\bar{\bar{x}}$ są stałymi które należy w odpowiedni sposób wyznaczyć.

Stałą α_2 wyznaczy z tożsamości (1 0) mającej w tym przypadku postać

$$g'[y_2(x)]-h'[x-y_2(x)]+ah'\{(a-b)y_2(x)+bx-y_1[(a-b)y_2(x)+bx]\} -$$

$$- bg'\{y_1[(a-b)y_2(x)+bx]\} = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}},$$

gdzie $\bar{\bar{x}}$ jest jednoznacznym pierwiastkiem równania

$$(a-b)y_2(x)+bx = \bar{x}$$

Po wyliczeniach mamy

$$\alpha_2 = \frac{1-ab+b(a+b)\alpha_1}{2+a(a-b)-(a^2-b^2)\alpha_1} \quad \text{i} \quad \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-(a-b)\alpha_1(\bar{x}-x_0)}{b+\alpha_2(a-b)}$$

Z powyższego łatwo zauważyć, że funkcja $y(x)$ będzie przedziałami liniowa.

LITERATURA

[1] Bellman R. - Dynamic programming, Princeton, 1957.

[2] Sobieszek W. - O pewnej klasie warunkowych zagadnień ekstremalnych, Zastosowania Matematyki, t. 8 str. 169-177, 1965.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ $f(x) = \max\limits_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f[ay + b(x-y)]\}$

В СЛУЧАЕ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе доказано 7 теорем относящихся к структуре решения уравнения (1) а также функции, которая выполняет максимум правой стороны уравнения (1). С доказанных теорем вытекают некоторые выводы, которые применяются в определении решения уравнения (1) в случае вогнутых функций $g(x)$ и $h(x)$.

Применение этих выводов представлено на примере уравнения (16).

Одна с доказанных теорем является обобщением конгруэнтной теоремы находящейся в монографии [1].

ON THE SOLUTION OF THE EQUATION $f(x) = \max\limits_{0 \leq y \leq x} [g(y)+h(x-y)+ + f(ay + b(x-y))]$ IN THE CASE OF CONCAVE FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper proves seven theorems concerning the structure of the solution of both equation (1) and the function which realises the maximum of the right side of this equation. From the proved theorems there may be gathered some corollaries, which may be applied when determining the solution of equation (1) in the case of concave functions g and h. The application of these corollaries has been illustrated by means of equation (16). One of the proved theorems is a generalization of the correspondent theorem set up in monograph (1).