ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

W. SOBIESZEK i J. STOLARZ

O NIEJEDNOZNACZNOSCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA $f(x) = \max\limits_{y_1+y_2\leqslant x} \left[g(y_1) + h(y_2) + f(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right]$

Wstęp

W pracy niniejszej rozważa się równanie funkcyjne programowania dynamicznego

$$f(x) = \max_{y_1+y_2\leqslant x} \left[g(y_1) + h(y_2) + f(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right], \tag{1}$$

w którym $g(x)$ i $h(x)$ są danymi funkcjami, zaś a i b danymi liczbami, natomiast $f(x)$ jest funkcją poszukiwaną; opisuje ono szerszą klasę zagadnień ekstremalnych niż równanie

$$f(x) = \max_{0\leqslant y \leqslant x} \left\{g(y) + h(x-y) + f\left[ay+b(x-y)\right]\right\} \tag{2}$$

i dlatego stanowi jego uogólnienie.

Równanie (1) podane zostało w monografii [1] bez jakiejkolwiek analizy jego rozwiązania. Zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (2) oraz struktura tego rozwiązania, zostały zbadane dość wyczerpująco we wspomnianej już monografii [1]. Ponieważ dla równania (1) problem istnienia jednoznacznego rozwiązania jest skomplikowany i dotychczas nie został wyjaśniony oraz ze względu na praktyczną przydatność tego równania, autorzy niniejszej pracy poddali równanie (1) szczegółowej analizie w przypadku liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$ i udowodnili, że już w tym przypadku posiada ono nieskończenie wiele rozwiązań liniowych, wśród których znajduje się rozwiązanie uzyskane metodą kolejnych przybliżeń. W pracy niniejszej podaje się nową metodę rozwiązywania równań (1) i (2), dzięki której w przypadku liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$ uzyskuje się wszystkie liniowe rozwiązania równania (1). W oparciu o tę metodę w przypadku liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$ podano pełną analizę rozwiązalności równania (2), otrzymując warunek konieczny i wystarczający na istnienie jednoznacznego rozwiązania. Zauważmy (patrz [1]), że w metodzie kolejnych przybliżeń uzyskuje się tylko warunki wystarczające.

1. Zagadnienia optymalizacyjne prowadzące do równań (1) i (2)

Załóżmy, że mamy do dyspozycji x jednostek pewnego zasobu gospodarczego. Rozważamy dwa rodzaje działalności, z którymi związane są funkcje użyteczności $g(x)$ i $h(x)$, wyrażające przychód odpowiednio z pierwszej i drugiej działalności w zależności od zużytego zasobu x. Zasób x dzielimy na dwie części y_1 i $x-y_1$, które przeznaczymy odpowiednio na prowadzenie pierwszej i drugiej działalności. Zakładamy dalej, że po pierwszym etapie, na skutek zużycia, część y_1 oraz część $x-y_1$ zasobu x wyniesie odpowiednio ay_1 i $b(x-y_1)$, gdzie $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < 1$. W związku z tym na prowadzenie obu działalności w drugim etapie pozostaje zasób $ay_1+b(x-y_1) = x_2$, który podobnie jak poprzednio dzielimy na części y_2 i x_2-y_2, przeznaczając je odpowiednio na pierwszą i drugą działalność. Rozważać będziemy proces n-etapowy, przy czym opisana wyżej operacja podziału powtarza się n-krotnie. Proces n-etapowy daje przychód

$$S_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[g(y_i) + h(x_i-y_i)\right],$$

gdzie

$$0 \leqslant y_i \leqslant x_i \tag{3}$$

oraz

$$x_1 = x$$
$$x_2 = ay_1 + b(x-y_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = ay_{n-1} + b(x_{n-1}-y_{n-1}).$$

Maksymalny przychód z procesu n-etapowego wynosi

$$f_n(x) = \max_{D_n(x)} S_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

gdzie $D_n(x)$ jest obszarem n-wymiarowym zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$ określonym nierównościami (3). W monografii [1] dowodzi się, że funkcje $f_n(x)$ spełniają równania rekurencyjne

$$f_n(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \left\{ g(y) + h(x-y) + f_{n-1}\left[ay+b(x-y)\right] \right\},$$

gdzie

$$f_1(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \left[g(y) + h(x-y) \right]$$

i stanowią ciąg kolejnych przybliżeń rozwiązania $f(x)$ równania (2). Jeżeli na każdym etapie podział zasobu, którym dysponujemy będzie niepełny, tzn. na części, których suma nie przekracza go, to taki proces n-etapowy daje przychód

$$S_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[g(y_i) + h(z_i) \right],$$

gdzie

$$0 \leqslant y_i + z_i \leqslant x_i \tag{4}$$

oraz

$$x_1 = x$$

$$x_2 = ay_1 + bz_1 + x_1 - y_1 - z_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = ay_{n-1} + bz_{n-1} + x_{n-1} - y_{n-1} - z_{n-1}.$$

Wówczas przychód maksymalny wyniesie

$$f_n(x) = \max_{D_{2n}(x)} S_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

gdzie $D_{2n}(x)$ jest obszarem 2 n-wymiarowym zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ określonym nierównościami (4).
Analogicznie funkcje $f_n(x)$ spełniają równania rekurencyjne

$$f_n(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[g(y_1) + h(y_2) + f_{n-1}(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right],$$

gdzie

$$f_1(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[g(y_1)+h(y_2)\right].$$

Przy pewnych założeniach o funkcjach $g(x)$ i $h(x)$ ciąg $\{f_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny do rozwiązania równania (1).

2. Analiza rozwiązalności równania (2) w przypadku liniowych funkcji g(x) i h(x) w oparciu o nową metodę

Ponieważ ciąg $\{f_n(x)\}$ przy pewnych założeniach o funkcjach $g(x)$ i $h(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$ będącej jednoznacznym rozwiązaniem równania (2), to rozwiązanie równania (2) uzyskane jakimkolwiek sposobem jest granicą ciągu kolejnych przybliżeń, a więc rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego nieskończenie wielostopniowego, który aproksymuje proces skończony. Na przykładzie równania (2) w przypadku liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$ przedstawimy nowy sposób wyznaczenia rozwiązania równania (2) eliminujący z rozważań metodę kolejnych przybliżeń.

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja $f(x)$ była rozwiązaniem równania

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \left\{Ay+B(x-y) + f\left[ay+b(x-y)\right]\right\} \tag{5}$$

jest aby

$$f(x) = x \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right).$$

Dowód:

W przypadku gdy $a > b$, równanie (5) za pomocą podstawienia $ay+b(x-y) = z$ można zastąpić równaniem

$$f(x) = \max_{bx \leqslant z \leqslant ax} \left[\frac{A-B}{a-b} z + \frac{aB-bA}{a-b} x + f(z)\right].$$

Przypuśćmy, że istnieją funkcje $bx \leqslant \bar{z}(x) \leqslant ax$ i $\bar{f}(x)$ takie, że

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \max_{bx \leqslant z \leqslant ax} \left[\frac{A-B}{a-b} z + \frac{aB-bA}{a-b} x + \bar{f}(z)\right] = \\ &= \frac{A-B}{a-b} \bar{z}(x) + \frac{aB-bA}{a-b} x + \bar{f}\left[\bar{z}(x)\right].\end{aligned} \tag{6}$$

Z optymalności funkcji $\bar{z}(x)$ wynika, że dla każdej funkcji $bx \leqslant z(x) \leqslant ax$

$$\bar{f}(x) \geqslant \frac{A-B}{a-b} z(x) + \frac{aB-bA}{a-b} x + \bar{f}\left[z(x)\right]. \tag{7}$$

Iterując (6) i (7) mamy odpowiednio

$$\bar{f}(x) = \frac{aB-bA}{a-b} x + \frac{A(1-b)-B(1-a)}{a-b} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n, \tag{8}$$

$$\bar{f}(x) \geqslant \frac{aB-bA}{a-b} x + \frac{A(1-b)-B(1-a)}{a-b} \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \tag{9}$$

gdzie $\bar{z}^n$ i z^n oznacza odpowiednio n-tą iterację funkcji $\bar{z}(x)$ i $z(x)$. Z (8) i (9) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{10}$$

gdy

$$\frac{A}{1-a} > \frac{B}{1-b}.$$

Ponieważ nierówność (10) zachodzi dla każdej funkcji $bx \leqslant z(x) \leqslant ax$, więc w szczególności dla funkcji $z(x) = ax$. Z nierówności $\bar{z}(x) \leqslant ax$ wynika, dla n-tej iteracji funkcji $\bar{z}(x)$, nierówność

$$\bar{z}^n \leqslant a^{n-1} z(x).$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} z.$$

Wynika stąd, że $\bar{z}(x) \geqslant ax$. Ponieważ $\bar{z}(x) \leqslant ax$, więc $\bar{z}(x) = ax$. Zatem, na mocy (8)

$$\bar{f}(x) = \frac{A}{1-a} x.$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli

$$\frac{A}{1-a} > \frac{B}{1-b} \quad \text{i} \quad a > b,$$

to funkcja

$$f(x) = \frac{A}{1-a} x$$

spełnia równanie (5). W przypadku gdy

$$\frac{A}{1-a} < \frac{B}{1-b} \quad \text{i} \quad a > b,$$

postępując podobnie stwierdzamy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $f(x)$ była rozwiązaniem równania (5) jest, aby miała postać

$$f(x) = \frac{B}{1-b} x.$$

Identyczne wyniki otrzymujemy w przypadku gdy $a < b$. Jeżeli

$$\frac{A}{1-a} = \frac{B}{1-b},$$

to warunek konieczny wynika z (8) a dostateczny z bezpośredniego sprawdzenia.

Wydaje się, że stosując tę metodę można będzie wyznaczyć rozwiązanie równania (2) w tych przypadkach, gdy nie można go uzyskać metodą kolejnych przybliżeń. Prace w tym kierunku będą kontynuowane.

3. Analiza rozwiązalności równania (1) w przypadku liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby funkcja $f(x) = \alpha x$ była rozwiązaniem równania

$$f(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[Ay_1+By_2 + f(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right] \tag{11}$$

jest aby

$$\alpha \geqslant \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right)$$

Dowód:

Jeżeli funkcja αx jest rozwiązaniem równania (11), to

$$\alpha x = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[Ay_1+By_2+\alpha(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right].$$

Ponieważ prawa strona powyższej równości oznacza "max" funkcji liniowej w wielościanie wypukłym, które w tym przypadku może być zrealizowane w punkcie (0, 0) lub (0, x) lub (x, 0), więc

$$\alpha x = \max\left[\alpha x, (A+a\alpha)x, (B+b\alpha)x\right] = x \cdot \max(\alpha, A+a\alpha, B+b\alpha).$$

Stąd

$$\alpha = \max(\alpha, A+a\alpha, B+b\alpha).$$

Zatem

$$\alpha \geqslant A+a\alpha \quad \text{i} \quad \alpha \geqslant B+b\alpha.$$

Więc

$$\alpha \geqslant \max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right)$$

Dowód warunku wystarczającego jest widoczny. Wykazaliśmy, że w klasie liniowych funkcji $g(x)$ i $h(x)$ równanie (1) posiada nieskończenie wiele rozwiązań liniowych.

Pokażemy, że jedno z rozwiązań równania (11) można otrzymać metodą kolejnych przybliżeń; jest ono rozwiązaniem odpowiedniego procesu optymalizacyjnego nieskończenie wielostopniowego.

Udowodnimy, że rozwiązanie uzyskane metodą kolejnych przybliżeń ma postać:

$$f(x) = 0, \quad \text{gdy} \quad A \leqslant 0 \quad \text{i} \quad B \leqslant 0$$

$$f(x) = x.\max\left(\frac{A}{1-a}, \frac{B}{1-b}\right) \quad \text{gdy} \quad \max(A,B) > 0.$$

Dla równania (11) elementy ciągu kolejnych przybliżeń $\{f_n(x)\}$ spełniają następujące związki rekurencyjne:

$$f_n(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[Ay_1+By_2+f_{n-1}(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right].$$

gdzie

$$f_1(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} (Ay_1+By_2).$$

Zauważmy, że jeśli $A \leqslant 0$ i $B \leqslant 0$, to ciąg $\{f_n(x)\}$ składa się z samych zer i jego granica $f(x) = 0$ jest rozwiązaniem równania (11). Wobec tego załóżmy, że

$$M_1 = \max(A,B) > 0.$$

Ponieważ funkcja liniowa w wielościanie wypukłym osiąga wartość największą w pewnym wierzchołku tego wielościanu, więc "max" z $y_1+y_2 \leqslant x$ funkcji liniowej zmiennych y_1 i y_2 może być zrealizowane w punkcie $(0,0)$ lub $(0,x)$ lub $(x,0)$. Stąd

$$f_1(x) = \max(0,Ax,Bx) = M_1x,$$

gdzie

$$M_1 = \max(A,B);$$

$$f_2(x) = \max\left[M_1x, (A+aM_1)x, (B+bM_1)x\right] = M_2x,$$

gdzie

$$M_2 = \max(M_1, A+aM_1, B+bM_1).$$

Ogólnie

$$f_n(x) = \max\left[M_{n-1}x, (A+aM_{n-1})x, (B+bM_{n-1})x\right] = M_nx,$$

gdzie

$$M_n = \max(M_{n-1}, A+aM_{n-1}, B+bM_{n-1}).$$

Udowodnimy najpierw, że ciąg $\{f_n(x)\} = \{M_n x\}$ jest zbieżny. W tym celu wystarczy udowodnić, że ciąg $\{M_n\}$ jest zbieżny. Ponieważ

$$A+aM_1 > A \quad i \quad B+bM_1 > B,$$

więc

$$\max(A+aM_1,\ B+bM_1) > \max(A,B) = M_1.$$

Stąd

$$M_2 = \max(A+aM_1,\ B+bM_1) > M_1.$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego n

$$M_n = \max(A+aM_{n-1},\ B+bM_{n-1}) > M_{n-1}. \tag{12}$$

Zatem ciąg $\{M_n\}$ jest rosnący. Ponieważ

$$M_2 = \max\ (A+aM_1,\ B+bM_1) \leqslant (1+c)M_1,$$

gdzie $c = \max\ (a,b)$,

$$M_3 = \max(A+aM_2,\ B+bM_2) \leqslant (1+c+c^2)M_1,$$

i ogólnie

$$M_n \leqslant (1+c+c^2+\ldots+c^{n-1})M_1;$$

więc

$$M_n \leqslant \frac{M_1}{1-c},$$

bo każda suma częściowa szeregu $M_1 \sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1}$ nie przekracza jego sumy. Stąd i z monotoniczności wynika, że ciąg $\{M_n\}$ ma granicę; oznaczamy ją przez M.

Z (12) wynika, że dla każdego n

$$M_n \geqslant A+aM_{n-1} \quad \text{i} \quad M_n \geqslant B+bM_{n-1}.$$

Po przejściu w powyższych nierównościach do granicy, otrzymamy

$$M \geqslant A+aM \quad \text{i} \quad M \geqslant B+bM, \tag{13}$$

co oznacza, że

$$M \geqslant \max\,(A+aM,\ B+bM). \tag{14}$$

Z drugiej strony

$$M_n = \max(A+aM_{n-1},\ B+bM_{n-1}) \leqslant \max\,(A+aM,\ B+bM),$$

więc

$$M \leqslant \max(A+aM,\ B+bM). \tag{15}$$

Zatem na podstawie (14) i (15)

$$M = \max(A+aM,\ B+bM) \tag{16}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja Mx spełnia równanie (11).

Z nierówności (13) i z równości (16) wynika, że

$$M = \max\left(\frac{A}{1-a},\ \frac{B}{1-b}\right).$$

Nasuwające się pytania, czy istnieją rozwiązania nieliniowe równania (1) w przypadku liniowych funkcji g(x) i h(x) oraz jaki związek z odpowiednim problemem optymalizacyjnym mają rozwiązania równania (1) nie będące granicą ciągu kolejnych przybliżeń, pozostawiamy tymczasowo bez odpowiedzi.

LITERATURA

[1] Bellman R. - Dynamic Programming, Princeton 1957, Princeton Univ. Press.

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$$f(x) = \max_{y_1+y_2 \leq x} \left[g(y_1) + h(y_2) + f(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right]$$

Р е з ю м е

В настоящей работе представлен новый метод решений уравнений (1) и (2), благодаря которому в случае линейных функций g(x) и h(x) получаем все линейные решения уравнения (1) а для уравнения (2) - необходимое и достаточное условие для существования однозначного решения.

ABOUT THE AMBIGUITY OF THE SOLUTIONS OF THE EQUATION

$$f(x) = \max_{y_1+y_2 \leqslant x} \left[g(y_1)+h(y_2)+f(ay_1+by_2+x-y_1-y_2)\right]$$

S u m m a r y

This paper presents a new method of solving equations (1) and (2), so that in the case of linear functions $g(x)$ and $h(x)$ all the linear solutions of equation (1) are to be obtained, whereas for equation (2) the condition is given that is necessary and sufficient for the existence of an explicit solution.