ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

JERZY KACZMARSKI
Katedra Matematyki A

UWAGI O CAŁKOWITEJ UNIMODULARNOŚCI MACIERZY

W pierwszym paragrafie pracy dowodzę, że własność - "być macierzą całkowicie unimodularną" - jest niezmiennikiem przekształceń zwanych w literaturze wykluczeniami Jordana. Ta cecha wykluczeń Jordana pozwala sformułować warunek konieczny i wystarczający na to, aby A była macierzą całkowicie unimodularną.

W paragrafie drugim określone zostały operacje S i S', również zachowujące własność całkowitej unimodularności. Operacje te wykorzystano tak w twierdzeniu podającym warunek wystarczający na to, aby wszystkie macierze pewnego zbioru były macierzami całkowicie unimodularnymi jak i w twierdzeniu mówiącym o sprowadzalności macierzy całkowicie unimodularnej do macierzy jednostkowej.

§ 1

Definicja 1.1

Macierz A nazywać będziemy k-modularną, jeśli wszystkie wyznaczniki stopnia s, $1 \leqslant s \leqslant k$, wyjęte z tej macierzy równe są 0,1,-1. Jeśli wszystkie wyznaczniki wyjęte z tej macierzy równe są 0,1 lub -1, to macierz nazywamy całkowicie unimodularną.

Definicja 1.2.[x)]

Wykluczeniem Jordana dokonanym nad macierzą A, z elementem rozwiązującym $a_l^r \neq 0$, nazywamy przekształcenie tej macierzy w macierz B, której elementy wyznacza się na podstawie prawideł:

a) element a_l^r zastąpiony zostaje jedynką;,

b) pozostałe elementy l-tej kolumny nie ulegają zmianie;

c) elementy r-tego wiersza zmieniają znaki;

d) miejsce dowolnego innego elementu a_k^i zajmuje liczba $a_k^i a_l^r - a_l^i a_k^r$,

e) wszystkie uzyskane w ten sposób wielkości dzielimy przez a_l^r.

Np. macierz

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \quad a_1^2 \neq 0$$

przekształca się przez wykluczenie Jordana z elementem rozwiązującym a_1^2 w macierz

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a_1^1}{a_1^2} & \frac{a_2^1 a_1^2 - a_1^1 a_2^2}{a_1^2} & \frac{a_3^1 a_1^2 - a_1^1 a_3^2}{a_1^2} \\ \frac{1}{a_1^2} & \frac{-a_2^2}{a_1^2} & \frac{-a_3^2}{a_1^2} \\ \frac{a_1^3}{a_1^2} & \frac{a_2^3 a_1^2 - a_1^3 a_2^2}{a_1^2} & \frac{a_3^3 a_1^2 - a_1^3 a_3^2}{a_1^2} \end{pmatrix}.$$

W zbiorze macierzy jedno-modularnych wykluczenia Jordana można określić w równoważny lecz wygodniejszy sposób.

x) - [1] lub [2]

Definicja 1.3

Operacje J_{rl} i J'_{rl} nazywać będziemy dopuszczalnymi w macierzy $A = \left\{a^i_k\right\}$, jeśli A jest macierzą jedno-modularną $a^r_l \neq 0$.

$$J_{rl}(A) = \bar{A} \qquad \bar{A} = \left\{\bar{a}^i_k\right\} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$J'_{rl}(A) = A' \qquad A' = \left\{a'^i_k\right\} \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$\bar{A}: \begin{cases} \text{jeśli } a^i_l a^r_l = 0, \text{to } \bar{a}^i = a^i \quad i \neq r \\ \text{"} \quad a^i_l a^r_l = 1, \text{"} \quad \bar{a}^i = (a^i_1 - a^r_1 \ldots a^i_{l-1} - a^r_{l-1}, a^i_l a^r_l, a^i_{l+1} - a^r_{l+1} \ldots a^i_m - a^r_m) \\ \text{"} \quad a^i_l a^r_l = 1, \text{"} \quad \bar{a}^i = (a^i_1 + a^r_1 \ldots a^i_{l-1} + a^r_{l-1}, a^i_l a^r_l, a^i_{l+1} + a^r_{l+1} \ldots a^i_m + a^r_m) \\ \qquad \bar{a}^r = (-a^r_1 a^r_l \ldots a^r_{l-1} a^r_l, a^r_l, -a^r_{l+1} a^r_l \ldots -a^r_m a^r_l) \end{cases}$$

$$A': \begin{cases} \text{jeśli } a^r_k a^r_l = 0, \text{to } a'_k = a_k \\ \text{"} \quad a^r_k a^r_l = 1, \text{"} \quad a'_k = (a^1_k - a^1_l \ldots a^{r-1}_k - a^{r-1}_l, -a^r_k a^r_l, a^{r+1}_k - a^{r+1}_l \ldots a^n_k - a^n_l) \\ \text{"} \quad a^r_k a^r_l = -1, \text{"} \quad a'_k = (a^1_k + a^1_l \ldots a^{r-1}_k + a^{r-1}_l, -a^r_k a^r_l, a^{r+1}_k + a^{r+1}_l \ldots a^n_k + a^n_l). \\ \qquad a'_l = (a^1_l a^r_l \ldots a^{r-1}_l a^r_l, a^r_l, a^{r+1}_l \; a^r_l \ldots a^n_l \; a^r_l) \end{cases}$$

Symbolami; a^r, a_l oznaczone zostały r-ty wektor - wiersz i l-ta wektor - kolumna.

Wprowadzoną definicję wyjaśnimy na przykładzie, niech:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą jedno-modularną, wówczas

$$J'_{31}(A) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1-a_1^1 & a_3^1+a_1^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2-a_1^2 & a_3^2+a_1^1 & a_4^2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Niech $a_l^r = 1$. Z definicji 1.2 i 1.3 wynika natychmiast, że

jeśli $a_k^r = 0$, to $\bar{a}_k^i = a_k^i = a_k'^i = a_k^i a_l^r - a_k^r a_l^i = b_k^i$

" $a_l^i = 0$, to $\bar{a}_k^i = a_k^i = a_k'^i = a_k^i a_l^r - a_k^r a_l^i = b_k^i$

" $a_l^i=1, a_k^r=-1$ " $\bar{a}_k^i = a_k^i - a_k^r = a_k^i + a_l^i = a_k'^i = a_k^i+1 = b_k^i$

" $a_l^i=1, a_k^r=1$, " $\bar{a}_k^i = a_k^i - a_k^r = a_k^i - a_l^i = a_k'^i = a_k^i-1 = b_k^i$

" $a_l^i=-1, a_k^r=1$," $\bar{a}_k^i = a_k^i + a_k^r = a_k^i - a_l^i = a_k'^i = a_k^i+1 = b_k^i$

" $a_l^i=-1, a_k^r=-1$," $\bar{a}_k^i = a_k^i + a_k^r = a_k^i + a_l^i = a_k'^i = a_k^i-1 = b_k^i$

oraz $\bar{a}^r = b^r = a'^r$

$\bar{a}_l = b_l = a'_l$.

Ponieważ definicje 1.2 i 1.3 uzasadniają również podobne związki w przypadku gdy $a_l^r = -1$, więc:

<u>Wniosek 1.1</u>

a) $J_{rl}(A) = J'_{rl}(A)$ (1.1a)

b) Jeżeli A jest macierzą jednomodularną, to macierz uzyskana z niej przez wykluczenie Jordana z elementem rozwiązującym a_l^r jest identyczna z macierzami

$$J_{rl}(A) \quad \text{i} \quad J'_{rl}(A). \tag{1.1b}$$

W macierzy $B = \left\{b_k^i\right\}$, powstającej z A przez wykluczenie Jordana z elementem a_l^r, dokonajmy wykluczenia Jordana z elementem b_l^r. Łatwo zauważyć, że rezultatem tych dwóch operacji będzie macierz A. Fakt ten oraz wniosek (1.1) uzasadniają

Wniosek 1.2

a) $J_{rl}\left[J_{rl}(A)\right] = A$ (1.2a)

b) $J'_{rl}\left[J'_{rl}(A)\right] = A$ (1.2b)

c) $J_{rl}\left[J'_{rl}(A)\right] = J'_{rl}\left[J_{rl}(A)\right] = A$. (1.2c)

Twierdzenie 1.1

Macierz A jest macierzą całkowicie unimodularną wtedy i tylko wtedy, gdy $J_{rl}(A)$ lub $J'_{rl}(A)$ są takimi macierzami.

Biorąc pod uwagę równości (1.1a) i (1.2a) zauważymy, że dla dowodu tezy wystarczy pokazać iż z całkowitej unimodularności macierzy A wynika całkowita unimodularności macierzy $J_{rl}(A)$.

Niech $a_l^r = a_1^n$ (założenie to nie zmniejsza ogólności rozważań gdyż transpozycja wierszy czy kolumn nie wpływa na całkowitą unimodularność macierzy).

Symbolem $B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_s \end{pmatrix}$ oznaczmy macierz utworzoną z wierszy $b^{i_s}, \dots b^{i_s}$ i kolumn $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$ macierzy $B = \left\{b_j^i\right\}$. Każdej

macierzy kwadratowej, wyjętej z macierzy A, przyporządkowujemy macierz, kwadratową wyjętą z $J_{rl}[A]$ według schematu:

a) jeśli $j_k \neq 1$, to $A\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_s \end{pmatrix} \to \bar{A}\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_s \end{pmatrix}$ (T.1.1a)

b) jeśli $i_k \neq n$, to $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} \to \bar{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$ (T.1.1b)

c) $A\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} \to \bar{A}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_s \\ j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$ (T.1.1c)

d) jeśli $j_k \neq 1, i_k \neq n$, to $A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix} \to \bar{A}\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$ (T.1.1d)

<u>Dowód</u>:

a) Bezpośrednio z definicji 1.3 wynika, że

$$\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_{s+1} \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} \bar{A}\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_{s+1} \end{pmatrix}$$

b) Podobnie jak w przypadku a) stwierdzamy:

$$\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} A'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$$

ponieważ jednak, na mocy równości (1.1a), $A' = \bar{A}$, więc

$$\operatorname{Det} A'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \operatorname{Det} \bar{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$$

c) Macierz $A\begin{pmatrix} n & j_1 \dots i \\ 1 & j \dots j \end{pmatrix}$ sprowadźmy do postaci, gdzie

$a_1^k = 0$ dla $k = i_1, \dots i_s$. Rozwijając wówczas

$\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$ według pierwszej kolumny i uwzględniając definicję 1.3, otrzymamy

$$\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} \bar{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_s \end{pmatrix}$$

d) Nad macierzą A wykonajmy ponownie operację J_{n1}. Uwzględniając przypadek c), otrzymujemy

$$\operatorname{Det} \bar{A}\begin{pmatrix} n & i_1, \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} J_{n1}\left(\bar{A}\begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}\right)$$

jednak ponieważ $J_{n1}\left[J_{n1}(A)\right] = A$, więc

$$\operatorname{Det} \bar{A}\begin{pmatrix} n & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix} = \pm \operatorname{Det} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_s \\ j_1 j_2 \dots j_s \end{pmatrix}$$

Powyższe rachunki dowodzą tezy twierdzenia 1.1. Wprost ze znanych w teorii macierzy twierdzeń wynika:

Wniosek 1.3

Jeśli A jest macierzą kwadratową, całkowicie unimodularną i nieosobliwą, to A^{-1} jest tego samego typu.

Twierdzenie 1.2

Jeżeli A jest macierzą $k-1$ - modularną i nie jest k-modularną, to

a) złożenie dowolnych $k-2$ operacji J lub J' daje w efekcie macierz przynajmniej jedno-modularną;

b) istnieje taki $k-1$ elementowy ciąg operacji J, że macierz będąca rezultatem złożenia operacji tego ciągu nie jest już macierzą jedno-modularną.

Lemat

Jeżeli macierz A będąc $k-1$ modularną nie jest macierzą k-modularną, to istnieje taki element a_1^r, że $J_{r1}(A)$ jest macierzą $k-2$ modularną.

Dowód

Niech $\left|\mathrm{Det}\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\right| \geqslant 2$ i $a_1^k \neq 0$.

Nad macierzą A wykonajmy operację J_{k1}. Ponieważ, jak to pokazano w dowodzie twierdzenia 1.1

$$\mathrm{Det}\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k-1\\ 2 & 3 & \dots & k\end{pmatrix} = \pm\,\mathrm{Det}\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}$$

więc otrzymana macierz A nie jest macierzą k-1 modularną. Jest jednak macierzą k-2 - modularną, gdyż każdy wyznacznik stopnia $\leqslant$ k-2 równy jest, co do wartości bezwzględnej, wyznacznikowi stopnia $\leqslant$ k-1 wyjętemu z k-1 - modularnej macierzy A. Przytoczony lemat uzasadnia pierwszą tezę zawartą w twierdzeniu 1.2.b.

Aby uprościć dowód przytoczymy:

Twierdzenie Stoinitza[x)]

Jeżeli macierz przekształcenia $y_i = \sum_{l=1}^{n} a_l^i x_l$, $i = 1,\dots,n$ jest macierzą nieosobliwą, to wszystkie zmienne niezależne x_l można drogą kolejnych wykluczeń Jordana przekształcić w zmienne zależne.

Tak jak poprzednio, załóżmy, że

$$\left|\mathrm{Det}\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\right| \geqslant 2.$$

Z twierdzenia Stoinitza wynika, że nad macierzą $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}$ można wykonać k-wykluczeń Jordana, (żadne dwa elementy rozwiązujące nie należą ani do tej samej kolumny ani do tego samego wiersza) przy czym $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}$ przekształca się w macierz odwrotną. Zauważmy, że w tym wypadku, każda operacja J zmniejsza o jeden stopień modularności macierzy, a więc macierz

$$J_{r_1 l_1}\left\{J_{r_2 l_2} \dots \left[J_{r_{k-1} l_{k-1}}\left(A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\right)\right]\right\}$$

nie może być macierzą jednomodularną. Nie jest nią więc także i macierz

$$J_{r_1 l_1}\left\{J_{r_2 l_2} \dots \left[J_{r_{k-1} l_{k-1}}(A)\right]\right\}.$$

x) - [2] str. 13.

§ 2

Do badania całkowitej unimodularności macierzy można także stosować niektóre operacje elementarne.

Definicja 2.1

Niech A będzie macierzą jedno-modularną, której element $a_1^r \neq 0$, wówcza $S_{r1}(A) = B$, $S'_{r1}(A) = B'$, gdzie

$$b^r = a^r$$

$$B: \begin{cases} \text{jeżeli } a_1^r a_1^i = 1, & \text{to } b^i = a^i - a^r \\ \text{jeżeli } a_1^r a_1^i = 1, & \text{to } b^i = a^i + a^r \\ \text{jeżeli } a_1^r a_1^i = 0, & \text{to } b^i = a^i \end{cases}$$

$$b'_1 = a_1$$

$$B': \begin{cases} \text{jeżeli } a_1^r a_j^r = 1, & \text{to } b'_j = a_j - a_1 \\ \text{jeżeli } a_1^r a_j^r = -1, & \text{to } b'_j = a_j + a_1 . \\ \text{jeżeli } a_1^r a_j^r = 0, & \text{to } b'_j = a_j \end{cases}$$

Łatwo dostrzec, posługując się oznaczeniami wprowadzonymi w dowodzie twierdzenia 1.1, że

$$\left|\operatorname{Det} B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_s \end{pmatrix}\right| = \left|\operatorname{Det} B\begin{pmatrix} r & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}\right| = \left|\operatorname{Det} A\begin{pmatrix} r & i_1 \dots i_s \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}\right| \tag{T.2.1a}$$

$$\left|\mathrm{Det}\ B\begin{pmatrix} r & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_{s+1} \end{pmatrix}\right| = \left|\mathrm{Det}\ A\begin{pmatrix} r & i_1 \dots i_s \\ j_1 & j_2 \dots j_{s+1} \end{pmatrix}\right| \qquad (T.2.1b)$$

$$\left|\mathrm{Det}\ B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{s+1} \\ 1 & j_1 \dots j_s \end{pmatrix}\right| = 0, \quad i_k \neq r. \qquad (T.2.1c)$$

Z równości tych oraz z analogicznych związków dla macierzy B', wynika

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli macierz A jest macierzą całkowicie unimodularną, to macierz $S_{r1}(A) = B$ i $S'_{r1}(A) = B'$ również mają tę cechę. Oczywiście twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.1 nie jest prawdziwe, można jednak łatwo udowodnić

Wniosek 2.1

Jeżeli A jest macierzą $k-1$ - modularną i nie jest k-modularną, to

a) złożenie dowolnych $k-2$ operacji S lub S' daje macierz przynajmniej jedno-modularną;
b) istnieje taki $k-1$ elementowy ciąg operacji S lub S', że macierz będąca rezultatem złożenia operacji tego ciągu nie jest już macierzą jedno-modularną;
c) jeżeli A jest macierzą kwadratową stopnia k, to $|\mathrm{Det}\ (A)| = 2$.

Ponieważ tezy a) i b) są raczej oczywiste podamy krótkie sadnienie trzeciej tezy wniosku 2.1.

Skoro macierz A stopnia k, jest nieosobliwa, możemy założyć, że wykonalne jest złożenie $S_{11}\left\{S_{22}\left[\dots S_{k-2,k-2}(A)\right]\right\} = B$. Oczywiście

$$|\mathrm{Det}\ A| = |\mathrm{Det}\ B| = \begin{vmatrix} 1 & 0\dots & b^1_{k-1} & b^1_k \\ 0 & 1\dots 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & b^{k-2}_{k-1} & b^{k-2}_k \\ \dots & 0 & b^{k-1}_{k-1} & b^{k-1}_k \\ 0\ 0 & 0 & b^{k-1}_{k-1} & b^k_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^{k-1}_{k-1} & b^{k-1}_k \\ b^k_{k-1} & b^k_k \end{vmatrix} = b.$$

Jeżeli jednak B jest macierzą jednomodularną, to musi być:

$$2 \leqslant |\mathrm{Det}\ A| = b \leqslant 2 \quad \text{czyli} \quad b = 2.$$

Wniosek 2.1 może być istotną pomocą przy dowodzeniu całkowitej unimodularności macierzy pewnych klas. Niech P(X) będzie pewną funkcją zdaniową; oznaczmy $\Omega = \left\{A \mid A \text{ - jest macierzą jednomodularną i } P(A)\right\}$.

<u>Wniosek 2.2</u>

Jeżeli operacje S lub S′ są wewnętrzne w zbiorze Ω, to każdy element tego zbioru jest macierzą całkowicie unimodularną. Pewną ilustrację wniosku 2.2 daje klasa macierzy opisanych w znanym twierdzeniu Hellera.

Twierdzenie Hellera[x)]

Niech $A = \left\{a^i_j\right\}$ będzie macierzą o elementach 0,1,-1; o dwóch wierszach a^i i a^j będziemy pisać, że $a^i > a^i$, gdy każdy różny od zera element a^j_k wiersza a^j równy jest elementowi a^i_k wiersza a^i, stojącemu w tej samej kolumnie, macierz A jest całkowicie unimodularna, gdy:

(1) $\quad a^i_k = a^i_k \neq 0 \longrightarrow a^i > a^j$ lub $a^j > a^i$

(2) $\quad a^i_k = -a^i_k \neq 0 \longrightarrow a^i > -a^j$ lub $a^j > -a^i$.

Kończąc podamy jeszcze jedno twierdzenie wynikające z poprzednich rozważań, a charakteryzujące w pewien sposób, strukturę budowy macierzy całkowitej unimodularnych:

Wniosek 2.3

Jeżeli A jest macierzą całkowicie unimodularną i nieosobliwą, to przez operacje S lub S', transpozycje wierszy lub kolumn i mnożenie wierszy lub kolumn przez -1, można ją sprowadzić do macierzy jednostkowej.

Niech C będzie macierzą całkowicie unimodularną o wymiarach m x n, a $A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$ macierzą nieosobliwą wyjętą z C. Przyjmijmy ponadto, że macierz A można dzięki operacjom S' przeprowadzić w macierz jednostkową. Oznacza to, że $S_{i_1 1}\left\{S_{i_2 2} \ldots \left[S_{i_n n}\ (A)\right]\right\} = E$. Zauważmy, że wykonanie nad macierzą C dowolnej operacji S' równoważne jest pomnożeniu jej przez pewną macierz. Przypuśćmy, że operacja $S'_{i_1 1}$

x) - [3] str. 138.

wymaga dodania pierwszej kolumny do kolumn $c_2,\dots,c_k$, odjęcia od $c_{k+1},\dots,c_l$ i pozostawienia bez zmiany pozostałych, wówczas

$$S'_{i_1 1}(C) = C \cdot \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1, & 1, & \dots, & 1, & -1, & \dots, -1 & & & \\ & 1, & & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & 0 & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Uwagi te pozwalają napisać

$$S_{i_1 1}\left\{S_{i_2 2}, \dots, \left[S_{i_n n}(C)\right]\right\} = C \cdot A^{-1}.$$

Ponieważ operacje S' przekształcają macierz całkowicie unimodularną w macierz całkowicie unimodularną, więc

<u>Twierdzenie 2.2</u>

Jeżeli C jest macierzą całkowicie unimodularną, to macierz $C \cdot A^{-1}$, gdzie A jest macierzą wyjętą z C, również ma tę cechę.

LITERATURA

[1] Stiefel E. - Note on Jordan elimination, linear programing and Tchebycheff aproximation - Numerische Mathemtik 2(1960).

[2] Зуховицкий С., Авдеева Л. - Линейное и выпуклое программирование 1964.

[3] C. Berge. Théorie des graphes et ses applications (1967)

ПРИМЕЧАНИЯ О ВСЕЦЕЛОЙ УНИМОДУЛЯРНОСТИ МАТРИЦ

Р е з ю м е

В первом параграфе работы я доказываю, что свойство - "быть матрицей всецело унимодулярной" - является инвариантом отображений называемых в литературе исключениями Жордана. Это свойство позваляет сформулировать необходимое и достаточное условие на то, чтобы А была матрицей всецело унимодулярной. Во втором параграфе определены операции S и S', тоже оставляющие свойство всецелой унимодулярности.

Эти операции применено в теореме говорящей об достаточном условии на то, чтобы все матрицы некоторого множества были матрицами всецело унимодулярными.

LES REMARQUES DE LA MATRICE TOTALEMENT UNIMODULAIRE

R é s u m é

Dans le premier paragraphe de l'article on demontre que la propriete d' être matrice totalment unimodulaire est un invarient des transformation appelées dans la literature eliminations Jordan.

Cette propriete des elimination Jordan permet de formulé la conditione nécessaire et suffisante pour que A soit matrice totalement unimodulaire.

Dans le deuxième paragraphe on a defini les operations S et S' qui conservent egalement la total unimodularité. On a appliqué ces opérations dans le théorème présentant la condition suffisante pour que toutes les matrices d'un ensemble quelconque

soient totalement unimofulaires. On les a appliquées egalement dans le théorème qui démontre la transformation de la matrice totalement unimodulaire en matrice unité.