ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 nr kol. 285

JERZY KACZMARSKI
Katedra Matematyki A

O CAŁKOWITEJ UNIMODULARNOŚCI MACIERZY CYKLOMATYCZNEJ GRAFÓW ANTYSYMETRYCZNYCH

Praca niniejsza wykorzystuje osiągnięte w [3] rezultaty do badania macierzy cyklomatycznej grafów, ze specjalnym uwzględnieniem grafów topologicznych, płaskich.

§ 1

Definicja 1.1

Mówi się, że dany jest graf $G = (X,\Gamma)$ jeśli określony został pewien zbiór X oraz odwzorowanie $\Gamma : X \longrightarrow X$. Elementy zbioru X nazywane są punktami lub wierzchołkami grafu. Jeśli $x \in X$ i $y \in X$ oraz $y \in \Gamma x$, to uporządkowaną parę (x,y) nazywać będziemy łukiem. Zauważmy, że graf można w pełni określić przez podanie zbioru X oraz zbioru łuków U, co pozwala używać symbolu (X,U) na oznaczenie grafu (X,Γ). Krawędzią grafu $G = (X,U)$ nazywać będziemy każdy zbiór złożony z dwóch elementów $x \in X$ i $y \in X$ takich, że $(x,y) \in U$ lub $(y,x) \in U$. Na oznaczenie krawędzi używać będziemy symboli u, v albo wskazując jej końce $[x,y]$, a na oznaczenie zbioru krawędzi symbolu U. Parę (X,U) nazywa się grafem bez orientacji. Łańcuchem nazywamy dowolny ciąg krawędzi $(u_1, u_2, \ldots)$ przy czym każda krawędź u_k łącząc się jednym ze swych końców z krawędzią u_{k-1} drugim jest połączona z u_{k+1}. Łańcuch skończony, który wychodząc z dowolnego punktu x wpada do tego samego punktu nazywamy cyklem. Jeśli wszystkie krawędzie należące do danego cyklu są między sobą różne, to cykl ten nazwiemy - prostym w przeciwnym zaś razie mówić będziemy o cyklu złożonym. Jeśli dany cykl przechodzi dokładnie raz przez każdy punkt do niego należący, to nazywamy go elementarnym.

Definicja 1.2

Niech dany będzie graf $G = (X,U)$ posiadający n- wierzchołków, m- krawędzi i p- składowych spójnych; liczbę $\nu(G) = m-n+p$ nazywamy liczbą cyklomatyczną grafu G. Każdemu cyklowi przyporządkować można pewien wektor przestrzeni R^m, przyporządkowanie to opiszemy w procesie następującym; krawędziom grafu G nadajmy dowolną orientację; jeżeli cykl μ przebiega krawędź u_k - r_k razy w kierunku zgodnym z jej orientacją i s_k razy w kierunku przeciwnym, wówczas oznaczmy $c^k = r_k - s_k$. Wektor $(c^1, c^2,\ldots, c^m) \in R^m$ nazywać będziemy wektorem - cyklem odpowiadającym cyklowi μ. Cykle μ, μ', μ'' ... nazywać będziemy niezależnymi jeśli odpowiadające im wektory są liniowo niezależne.

Twierdzenie 1.1[x)]

Liczba cyklomatyczna $\nu(G)$ grafu G, równa jest maksymalnej liczbie cykli niezależnych.

Definicja 1.3

Graf $G = (X,U)$ nazywamy antysymetrycznym gdy spełniony jest warunek; $(x_1,x_k) \in U \longrightarrow (x_k,x_1) \notin U$.

x) - [1] str. 29.

Definicja 1.4.

Macierz S o elementach s^i_j, $i=1,\dots,n=|X|$, $j=1,\dots,m=|U|$

$$s^i_j = \begin{cases} +1 & \text{gdy punkt } x_i \text{ jest początkiem łuku } u_j \\ -1 & \text{" " " " końcem łuku } U_j \\ 0 & \text{" " } x_i \text{ nie jest ani początkiem ani końcem } u_j \end{cases}$$

nazywamy macierzą incydencji łuków grafu G.

Twierdzenie 1.2 x)

Macierz incydencji łuków dowolnego grafu jest macierzą całkowicie unimodularną.

Twierdzenie 1.3 xx) (Poincare - Veblen - Alexander)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wektor $c = (c^1_1, c^2_2,\dots,c^m)$ reprezentował cykl lub sumę cykli grafu antysymetrycznego G, jest aby $S.c = 0$. (O sumie,cykli mówimy w przypadku cykli rozłącznych i rozumiemy przez nią zbiór wszystkich krawędzi do nich należących).

Macierz, której kolumnami są wektory: $c_1 = (c^1_1, c^2_1,\dots c^m_1),\dots c_\nu = (c^1_\nu, c^2_\nu,\dots,c^m_\nu)$ ($\nu = \nu(G)$ jest liczbą cyklomatyczną grafu G) tworzące bazę przestrzeni rozwiązań układu $S\,c = 0$, nazywamy macierzą cyklomatyczną danego grafu. W monografii - "Théorie des graphes et ses application" (z której zaczerpnięte zostały wszystkie, wprowadzone dotychczas pojęcia, definicje i twierdzenia) - pokazano, że bazę przestrzeni rozwiązań układu $S.c = 0$ można wybrać w ten sposób aby macierz cyklomatyczna była macierzą o elementach 0,1 lub -1. W następnym paragrafie pokażę, że

---

x) - [1] str. 137.

xx) - [1] str. 142.

odpowiedni wybór bazy może zagwarantować całkowitą unimodularność macierzy cyklomatycznej danego grafu antysymetrycznego.

§ 2

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} s_1^1 c^1 + s_2^1 c^2 + \ldots + s_m^1 c^m &= 0 \\ s_1^2 c^1 + s_2^2 c^2 + \ldots + s_m^2 c^m &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ s_1^n c^1 + s_2^n c^2 + \ldots + s_m^n c^m &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

metodą kolejnych wykluczeń Jordana[x)] otrzymamy, pomijając nieistotną zmianę wskaźników:

$$\begin{aligned} c^1 &= \bar{s}^1_{m-\ +1} c^{m-V+1} + \ldots + \bar{s}^1_m c^m \\ c^2 &= \bar{s}^2_{m-V+1} c^{m-V+1} + \ldots + \bar{s}^2_m c^m \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c^{m-V} &= \bar{s}^{m-V}_{m-V+1} c^{m-V+1} + \ldots + \bar{s}^{m-V}_m c^m \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie macierz $\bar{S} = \left\{ s_j^i \right\}$ $i=1,\ldots,m-v$, $j=m-V+1,\ldots,m$ uzyskuje się z macierzy $J_{11}\left\{ J_{22} \ldots \left[J_{m-v,m-V}(S) \right] \right\}$ przez skreślenie wszystkich rozwiązujących kolumn. Przedstawione w [3] twierdzenia dowodzą, wobec całkowitej unimodularności macierzy incydencji łuków S (twierdzenie 1.2) całkowitej unimodularności macierzy $\bar{S}$.

x) - [2] str. 22.

Każdy z wektorów:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= (\bar{s}^1_{m-\nu+1}, \bar{s}^2_{m-\nu+1}, \ldots, \bar{s}^{m-\nu}_{m-\nu+1}, 1, 0, \ldots, 0) \\
c_2 &= (\bar{s}^1_{m-\nu+2}, \bar{s}^2_{m-\nu+2}, \ldots, \bar{s}^{m-\nu}_{m-\nu+2}, 0, 1, 0 \ldots, 0) \qquad (2.3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_\nu &= (\bar{s}^1_m \quad \bar{s}^2_m \quad, \ldots, \bar{s}^{m-\nu}_m \quad, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}
$$

spełnia warunki (2.2), a układ tych wektorów jest, jak łatwo zauważyć, bazą przestrzeni rozwiązań. Macierz zbudowana z tych wektorów ma postać $C = \binom{\bar{S}}{E}$, gdzie $\bar{S}$ jest macierzą całkowicie unimodularną, a E macierzą jednostkową, jest więc macierzą całkowicie unimodularną.

§ 3

Niech C będzie dowolną macierzą cyklomatyczną grafu $G=(X,U)$, gdzie $|X| = n$, $|U| = m$, zawierającą macierz jednostkową o wymiarach $\nu(G) \times \nu(G)$. Dla wygody przyjmijmy że $C = \binom{E}{S}$. Dowolny element c^i_i, $i = 1, \ldots, \nu(G)$ nazywać będziemy wolnym elementem wektor - cyklu c_i, a odpowiadającą mu krawędź u_i, $i = 1, \ldots, \nu(G)$ wolną krawędzią cyklu reprezentowanego przez c_i.

Twierdzenie 3.1

Jeżeli $C = \binom{E}{S}$ jest macierzą cyklomatyczną grafu G, o elementach 0,1 lub -1, to

a) każdy wektor cykl macierzy C reprezentuje cykl elementarny;
b) jeżeli cykle c_k i c_l przechodzą przez punkty x_1 i x_2 grafu G oraz μ_1 jest tym łańcuchem łączącym dane punkty,

który zawierając się w c_k nie zawiera u_k, a μ_2 łańcuchem zawierającym się w c_i i nie zawierającym u_i, to $\mu_1 = \mu_2$;

c) macierz C jest macierzą całkowicie unimodularną.

Dowód

Cykl reprezentowany przez wektor - cykl c_i zawierać musi cykl elementarny do którego należy krawędź u_i. Oznaczmy ten cykl przez μ a odpowiadający mu wektor - cykl przez c. Ponieważ kolumny macierzy C tworzą bazę przestrzeni cykli więc $c = a_1c_1 + \ldots + a_\nu c_\nu$. Skoro jednak żadna z krawędzi $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_\nu$ nie należy do μ więc musi być $a_1 = a_2 = \ldots = a_{i-1} = a_{i+1} = \ldots = a_\nu = 0$, czyli $c = a_i\, c_i$. Równość ta może zajść tylko w tym przypadku gdy $a_i = 1$ lub -1, a c_i jest cyklem elementarnym.

b) Przypuśćmy, że $\mu_1 \neq \mu_2$. Dowód można sprowadzić do sytuacji, gdy μ_1 i μ_2 tworzą łącznie cykl elementarny - μ. Niech c oznacza wektor - cykl reprezentujący cykl μ. Łatwo pokazać, że c nie może być kombinacją liniową kolumn macierzy C, co przeczy założeniu, że jest to macierz cyklomatyczna danego grafu.

c) Niech wektory - cykle c_k i c_i reprezentują cykle μ_k i μ_i grafu G. Przypuśćmy, że krawędzie $u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots, u_{s_p}$ należą jednocześnie do μ_k i μ_i. Z poprzednich rozważań otrzymujemy, że krawędzie te tworzą łańcuch elementarny, skąd wynika, że

$$c_k^{s_1} = c_i^{s_1} \longrightarrow \bigwedge_l c_k^{s_l} = c_i^{s_l} \qquad l = 2, \ldots, p$$

$$c_k^{s_1} = -c_i^{s_1} \longrightarrow \bigwedge_l c_k^{s_l} = -c_i^{s_l} \qquad \text{-"-}$$

Związki te dowodzą, że każdy wyznacznik drugiego stopnia wyjęty z macierzy C jest równy 0,1 lub -1. Macierz C jest więc macierzą dwumodularną. Niech $c_l^r \neq 0$. Wykonajmy w macierzy C operację S'_{rl} x). Otrzymamy wówczas macierz $S'_{rl}(C) = C'$, taką że

$$c'_l = c_l$$

$$C' = \begin{cases} \text{jeżeli } c_l^r \, c_i^r = 1, & \text{to } c'_i = c_i - c_l \\ \text{jeżeli } c_l^r \, c_i^r = -1, & \text{to } c'_i = c_i + c_l . \\ \text{"} \quad c_l^r \, c_i^r = 0, & \text{to } c'_i = c_i \end{cases}$$

Z dwu-modularności macierzy C wynika, że operacja S'_{rl} przekształca macierz C w macierz o elementach 0,1 lub -1. Kolumny macierzy C' posiadają elementy wolne, (wolnym elementem l-tej kolumny jest element c_l^r oraz stanowią bazę przestrzeni cykli grafu G. Rozumowanie to pozwala stwierdzić, że każdy ciąg operacji S' przekształca macierz C w C' o elementach 0,1 lub -1. Z twierdzenia

Twierdzenie xx)

Jeżeli A jest macierzą k-1-modularną i nie jest k- modularną to istnieje taki k-1 elementowy ciąg operacji S', że macierz będąca rezultatem operacji tego ciągu nie jest już macierzą jednomodularną

- wynika, że macierz C musi być macierzą całkowicie unimodularną.

x) - [3] str. 9 Definicja 2.1.

xx) - [3] str. 10 wniosek 2.1b.

LITERATURA

[1] Berge C. - Théorie des graphes et ses application - 1967.

[2] Зуховицкий С., Авдесва Л. - Линейное и выпуклое програмирование - 1964.

[3] Kaczmarski J. - Uwagi o całkowitej unimodularności macierzy.

О ВСЕЦЕЛОЙ УНИМОДУЛЯРНОСТИ МАТРИЦЫ ЦЫКЛОВ АНТИСИМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Р е з ю м е

Основным содержанием первой части работы является некоторое доказательство теоремы о всецелой унимодулярности матрицы циклов антисиметрических графов. Вторая часть посвящена исследованиям некоторых свойств системы циклов донного плаского графа соответствующих колумнам всецелой унимодулярной матрицы циклов.

R é s u m é

Le sujet principal de la première partie de cet article c'est la présentation du théorème de la matrice cyclomatique de graphes antisymetriques totalement unimodulaire. La deuxième partie est consacrée aux recherches de certaines propriétés du systeme de cycles dudit graph representés par les colonnes de la matrices cyclomatique totalement unimodulaire.