ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 15 Nr kol. 285

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK

PEWNA MODYFIKACJA METODY NEWTONA

Celem niniejszej notatki jest podanie pewnej modyfikacji metody Newtona przybliżonego rozwiązywania równań, która daje lepsze przybliżenia niż metoda Newtona, a ilością obliczeń niewiele różni się od tej metody. Dodatkowe założenia występujące przy tej modyfikacji nie ograniczają zbytnio możliwości jej stosowania. Z modyfikacji tej wynika także wzór dający zbieżność rzędu 3 (wraz z analizą jego stosowalności), którego wyprowadzenie podano w pracach [1] i [2].

1° Niech $f(x)$ będzie funkcją klasy $C^{(2)}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ taką, że

$$f'(x)\, f''(x) \neq 0 \quad \text{i} \quad \left[f'(x)\right]^2 - f(x) f''(x) > 0^{1)} \quad \text{dla } x \in (a,b) \quad \text{oraz}$$

$$f(a)\, f(b) < 0. \tag{1}$$

Przy założeniach (1) równanie

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $\xi \in (a,b)$.

---

1) Ponieważ $\left[f'(\xi)\right]^2 - f(\xi)\, f''(\xi) = \left[f'(\xi)\right]^2 > 0$ więc przedział $\langle a,b\rangle$ można dobrać tak by zachodziły założenia (1).

Przyjmijmy za początkowe przybliżenie liczby ξ dowolną liczbę $x^* \in \langle a,b \rangle$ spełniającą warunek

$$f(x^*)f''(x^*) > 0. \tag{3}$$

Następne przybliżenie x^{**} liczby ξ obliczamy ze wzoru

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*) - \lambda f(x^*)}, \tag{4}$$

gdzie $\lambda = \operatorname{sgn}\left[f'(x)\, f''(x)\right] \cdot m, \quad 0 < m \leqslant \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \frac{f''(x)}{2f'(x)} \right|.$

Wzór (4) jest modyfikacją znanego wzoru Newtona

$$x_1^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}. \tag{5}$$

2° Wykażemy, że przybliżenia x^* i x^{**} leżą po tej samej stronie pierwiastka ξ równania (2), oraz przybliżenia x^{**} jest lepsze niż przybliżenie x_1^{**}.
Wynika to z następujących nierówności

$$(x^* - \xi)(x^{**} - \xi) > 0, \quad \left|x^{**} - \xi\right| < \left|x^* - \xi\right|, \tag{6}$$

$$\left|x^{**} - \xi\right| < \left|x_1^{**} - \xi\right| - m\,(x_1^{**} - x^*)^2, \tag{7}$$

które obecnie udowodnimy.

Z (1), (3) i określenia liczby λ wynika

$$0 < \left[f'(x^*)\right]^2 - f(x^*)f''(x^*) < 2\left[f'(x^*)\right]^2 - f(x^*)\, f''(x^*) =$$

$$= 2\, f'(x^*)\left[f'(x^*) - f(x^*)\,\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right] \leqslant 2\, f'(x^*)\left[f'(x^*) - \lambda f(x^*)\right] < 2\left[f'(x^*)\right]^2,$$

ponieważ

$$\operatorname{sgn}\left[f(x^*)\,\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right] = \operatorname{sgn}\left[\lambda f(x^*)\right] = \operatorname{sgn}\left[f'(x^*)\right],$$

$$\left|\lambda f(x^*)\right| \leqslant \left|f(x^*)\,\frac{f''(x^*)}{2\,f'(x^*)}\right|.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$0<\left|f'(x^*) - \lambda f(x^*)\right|<\left|f'(x^*)\right|. \tag{8}$$

Z (4) i twierdzenia Langrange'a otrzymujemy

$$x^*-\xi = \left(x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)-\lambda f(x^*)}\right) - \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi) - \lambda f(\xi)}\right) =$$

$$= \left[1 - \frac{\left[f'(\eta)\right]^2 - f(\eta)f''(\eta)}{\left(f'(\eta) - \lambda f(\eta)\right)^2}\right]\cdot(x^*-\xi),$$

gdzie $\eta = \xi + \theta\,(x^*-\xi)$, $0<\theta<1$.

Z ostatniej równości wynikają nierówności (6) jeżeli

$$0<\frac{\left[f'(\eta)\right]^2 - f(\eta)\,f''(\eta)}{\left(f'(\eta) - \lambda f(\eta)\right)^2}<1. \tag{9}$$

Lewa strona nierówności (9) jest prawdziwa na postawie (1), a prawa strona jest równoważna nierówności

$$\lambda^2\,\left[f(\eta)\right]^2 + 2f(\eta)\,f'(\eta)\left[\frac{f''(\eta)}{2f'(\eta)} - \lambda\right]>0. \tag{10}$$

Ponieważ $\operatorname{sgn}\left[\frac{f''(x)}{2f'(x)} - \lambda\right] = \operatorname{sgn}\left[f'(x)f''(x)\right]$,

więc $\operatorname{sgn}\left[f(\eta)\,f'(\eta)\,\left(\frac{f''(\eta)}{2f'(\eta)} - \lambda\right)\right] = \operatorname{sgn}\left[f(\eta)\,f''(\eta)\right] = 1$,

a zatem prawdziwa jest nierówność (10).

Z kolei ze wzorów (4), (5) i nierówności (8) otrzymujemy

$$\frac{|x^* - x^{**}|}{|x^* - x_1^{**}|} = \left| \frac{f'(x^*)}{f'(x^*) - \lambda f(x^*)} \right| > 1, \tag{11}$$

skąd wynika

$$|x^* - x^{**}| > |x^* - x_1^{**}|. \tag{12}$$

Nierówność (11) na podstawie (6) można napisać w postaci

$$\frac{|x^* - \xi| - |x^{**} - \xi|}{|x^* - \xi| - |x_1^{**} - \xi|} = \frac{f'(x^*)}{f'(x^*) - \lambda f(x^*)} > 1.$$

Dodając do ostatniej nierówności stronami -1 otrzymujemy

$$\frac{|x_1^{**} - \xi| - |x^{**} - \xi|}{|x^* - \xi| - |x_1^{**} - \xi|} = \frac{\lambda f(x^*)}{f'(x^*) - f(x^*)},$$

a więc na podstawie (4)

$$\frac{|x_1^{**} - \xi| - |x^{**} - \xi|}{|x^* - x_1^{**}|} = \lambda(x^* - x^{**}) = m|x^* - x^{**}|,$$

skąd $|x^{**} - \xi| = |x_1^{**} - \xi| - m|x^* - x_1^{**}| \cdot |x^* - x^{**}|$.

Z (12) i ostatniej równości wynika nierówność (7).

Wzór (4) podobnie jak (5) można stosować wielokrotnie, gdyż $f(x^{**})\, f''(x^{**}) > 0$.

3° Załóżmy dodatkowo, że $f(x)$ jest funkcją klasy $C^{(3)}$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ i

$$[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \langle a, b\rangle \tag{13}$$

(lub, że funkcja $y = \frac{f''(x)}{2\,f'(x)}$ jest malejącą w przedziale $\langle a,b\rangle$).

Wyprowadzenie wzoru (4) nie ulegnie zmianie, gdy przyjmiemy

$$m = \min_{\xi \leq x \leq x^*} \left| \frac{f''(x)}{2\,f'(x)} \right|, \quad \text{gdy} \quad f'(x)f''(x) > 0$$

$$m = \min_{x^* \leq x \leq \xi} \left| \frac{f''(x)}{2\,f'(x)} \right|, \quad \text{gdy} \quad f'(x)f''(x) < 0.$$

Ponieważ z założenia (13) wynika, że $\frac{f''(x)}{2\,f'(x)}$ jest funkcją malejącą, więc

$$m = \left| \frac{f''(x^*)}{2\,f'(x^*)} \right| \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{f''(x^*)}{2\,f'(x^*)}.$$

Wstawiając tak określoną liczbę λ do wzoru (4) otrzymujemy

$$x^{**} = x^* - \frac{2\,f(x^*)\,f'(x^*)}{[2'f(x^*)]^2 - f(x^*)f''(x^*)},$$

którego wyprowadzenie na innej drodze podano w [1] i [2]. Wzór (14) podobnie jak (4) można stosować wielokrotnie.

LITERATURA

[1] Hauseholder A.S - Principles of numerical analysis, New York, Toronto - London, 1953, str. 151.

[2] Encyklopedia elementarnej matematyki, Algebra II, Moskwa - Leningrad, 1951, str. 363.

НЕКОТОРАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА

Р е з ю м е

В статье указана некоторая модификация метода Ньютона приближенного решения уравнений, которая дает лучшие приближения, чем метод Ньютона.

Если x^* будет начальным приближением корня уравнения $f(x)=0$, тогда следуещее приближение

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*) - \lambda f(x^*)},$$

где $\lambda = \operatorname{sgn}[f'f'']m$, $0 < m \leqslant \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$ при дополнительном предположении $[f'(x)]^2 - f(x)\, f''(x) > 0$ при $x \in \langle a, b\rangle$ по отношению к методу Ньютона.

SOME MODIFICATION OF NEWTONS METHOD

S u m m a r y

The paper deals with modification of Newtons method of approximate solution of equations. Approximations received by this method are better than approximations of Newton's method, however the number of calculations is not many. If x^* is an initial approximation of root of equation $f(x) = 0$, then (under the additional assumption $[f'(x)]^2 - f(x)\, f''(x) > 0$ for $x \in \langle a, b\rangle$ what is not at Newton's method) the next approximation is

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*) - \lambda f(x^*)},$$

where $\lambda = \operatorname{sgn}[f'f'']\, m$, $0 < m \leqslant \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$.